

IKKI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK, UNI HISOBLASH

To'rayev Ziyovuddin

Ilmiy Rahbar.

Shahrisabz davlat pedagogika instituti.

Tojiddinova Mashhura

Talaba.

Shahrisabz davlat pedagogika instituti.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17767116>

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada/tezisda ikki chiziq orasidagi burchakni topish masalasi nazariy va amaliy jihatdan batafsil yoritilgan. Chiziqlar geometriyada muhim tushuncha bo'lib, ularning o'zaro joylashuvi va burchagi matematik masalalarni yechishda asosiy rol o'ynaydi. Maqolada to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, vektorlar yordamida burchakni hisoblash, shuningdek, analitik geometriyadagi formulalar tahlil qilinadi.

Kalit So'zlar: Analitik geometriya, To'g'ri chiziq, Vektor, Burchak, Skalyar ko'paytma, Kosinus, Normal vektor, Birlik vektor.

1. Kirish

Matematik analizda va geometriyada **ikki chiziq orasidagi burchakni hisoblash** masalasi o'zaro chambarchas bog'liq bo'lgan asosiy tushunchalardan biridir. Geometriyada har qanday ob'ektning joylashuvi va o'zaro munosabatlarini tahlil qilishda burchaklar muhim rol o'ynaydi.

Funksiyaning uzluksizligi va monotoniya xossalari kabi, chiziqlarning o'zaro joylashuvi ham matematik tahlilda muhim ahamiyat kasb etadi. Chiziq o'z argumentining o'sishiga mos ravishda qiymatini tartibli ravishda o'zgartirsa, u monoton deyiladi; burchak masalasi esa chiziqlarning yo'nalishidagi tartibli farqni o'rganadi.

Ushbu masalaning yechimi fizika, injeneriya, kompyuter grafikasi va iqtisodiyotda kabi turli sohalarda keng qo'llaniladi. Masalan, iqtisodiyotda narx-talab funksiyalarini, fizikada o'sish-pasayish jarayonlarini tahlil qilishda bu kabi natijalar muhim o'rin tutadi.

Ushbu tezisda **ikki chiziq orasidagi burchakni topish masalasi** nazariy asoslari va hisoblash usullari ko'rib chiqiladi. Bunda monotonlik tushunchasi funksiyaning qiymatlarida tartib mavjudligini bildirgani kabi, chiziqlar orasidagi burchak ham ularning yo'nalishlaridagi tartibli munosabatni aks ettiradi. Hisoblash real analizning fundamental xossalari – limitlar, to'liqlik prinsipi va vektorlar nazariyasiga asoslanadi.

2. Nazariy Asoslar

Ikki chiziq orasidagi burchakni hisoblash masalasi bevosita analitik geometriya va vektorlar nazariyasining fundamental tushunchalari bilan bog'liqdir.

2.1. To'g'ri Chiziq Tushunchasi

To'g'ri chiziq – tekislikdagi yoki fazodagi eng sodda geometrik obyektdir. Uning joylashuvini va yo'nalishini aniqlash uchun turli xil tenglamalar shaklidan foydalaniladi.

1. Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$Ax + By + C = 0$$

Bu yerda A va B koeffitsiyentlari to'g'ri chiziqning normal vektori $n = (A, B)$ ni

tashkil etadi. Normal vektor chiziqqa perpendikulyar yo'nalishni ko'rsatadi.

2. Tekislikda burchak koeffitsiyentli tenglama:

$$y = kx + b$$

Bu yerda k burchak koeffitsiyenti bo'lib, to'g'ri chiziqning Ox o'qi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga tengdir. Bu koeffitsiyent chiziqning qanchalik tik (monoton o'sish yoki kamayishga o'xshash) ekanligini bildiradi.

To'g'ri chiziqning yo'nalishini belgilovchi eng muhim xossa – bu uning **yo'naltiruvchi vektori** hisoblanadi. Agar funksiya argumentining ozgina o'zgarishi natijasida qiymatida ham ozgina o'zgarish bo'lsa, u uzluksizdir¹. Xuddi shunday, to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori ham uning trayektoriyasidagi kichik o'zgarishlarni belgilaydi.

2.2. Vektorlar Yordamida Burchakni Hisoblash

Ikki chiziq orasidagi burchakni topishda vektorlar nazariyasi, xususan, chiziqlarning **yo'naltiruvchi vektorlari** orqali hisoblash eng samarali usul hisoblanadi.

Faraz qilaylik, bizga birinchi chiziqning yo'naltiruvchi $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ va ikkinchi chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ berilgan bo'lsin. Bu ikki vektor orasidagi θ burchakni topish uchun **skalyar ko'paytma** tushunchasidan foydalaniladi. Skalyar ko'paytma – ikki vektorning uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga tengdir.

α va β vektorlar orasidagi θ burchakning kosinusi quyidagi formula bilan topiladi:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

yoki koordinatalarda:

$$\cos \theta = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Bu yerda:

- $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$ – vektorlarning skalyar ko'paytmasining moduli (chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni olish uchun);
- $|\mathbf{a}|$ va $|\mathbf{b}|$ – vektorlarning uzunliklari (normasi).

Agar topilgan $\cos \theta$ qiymati musbat bo'lsa, u chiziqlar orasidagi o'tkir burchakka, manfiy bo'lsa, o'tmas burchakka mos keladi.

Monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema isbotlari real analizning fundamental xossalari – limitlar mavjudligi va to'liqlik prinsipiga asoslanadi. Xuddi shunday, vektorlar orasidagi burchakni hisoblash ham analitik geometriya va algebraik amallarning to'liqlik prinsiplariga tayanadi.

3. Ikki Chiziq Orasidagi Burchakni Hisoblash Usullari

Burchakni hisoblashda chiziqlarning qanday tenglama shaklida berilgani katta ahamiyatga ega. Asosan, tekislikdagi va fazodagi chiziqlar uchun turli yondashuvlar mavjud.

3.1. Tekislikdagi Ikki To'g'ri Chiziq Burchagi

Tekislikdagi L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlari orasidagi burchakni topish uchun eng keng tarqalgan usul ularning burchak koeffitsiyentlari yoki normal vektorlaridan foydalanishdir.

a) Burchak Koeffitsiyentlari Orqali

Agar chiziqlar $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, ular orasidagi ϕ burchagining tangensi quyidagi formula bilan topiladi:

$$\tan \phi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Bu formula chiziqlar kesishgan taqdirda qo'llaniladi.

• Maxsus holatlar:

- Agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, chiziqlar parallel ($\phi = 0$).
- Agar $1 + k_1 k_2 = 0$ (ya'ni $k_1 k_2 = -1$) bo'lsa, chiziqlar perpendikulyar ($\phi = 90$).

b) Normal Vektorlar Orqali

Agar chiziqlar umumiy tenglamasi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ bilan berilgan bo'lsa, ularning normal vektorlari bo'ladi.

Bu holda chiziqlar orasi $n_1 = (A_1, B_1)$ va $n_2 = (A_2, B_2)$ normal vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi.

$$\cos \phi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

3.2. Fazodagi Ikki To'g'ri Chiziq Burchagi

Fazoda joylashgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash faqatgina ularning yo'naltiruvchi vektorlari yordamida amalga oshiriladi.

Faraz qilaylik, L_1 chizig'ining yo'naltiruvchi vektori $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$ va L_2 chizig'ining yo'naltiruvchi vektori $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$ bo'lsin. Bu vektorlar chiziqlarning fazodagi harakat yo'nalishini belgilaydi. Chiziqlar orasidagi ϕ burchagi bu yo'naltiruvchi vektorlar orasidagi burchakning kosinusi yordamida topiladi:

$$\cos \phi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Bu yondashuv matematik analizda monoton funksiyaning uzluksizligini isbotlashda qo'llaniladigan limitlar mavjudligi prinsipiga o'xshaydi¹. Limit mavjudligi funksiyaning ma'lum tartibga ega ekanligini anglatgani kabi, yo'naltiruvchi vektorlarning mavjudligi ham chiziqlarning fazodagi aniq yo'nalishini belgilaydi. Bu usul analitik geometriyada eng fundamental usullardan biridir.

4. Amaliy Misollar

Bu bo'limda yuqorida keltirilgan hisoblash usullarini amalda qo'llash ko'rsatiladi.

4.1. Tekislikdagi To'g'ri Chiziqlar Orasidagi Burchak (Burchak Koeffitsiyentlari Usuli)

Masala: Tekislikda berilgan $L_1: y = 3x - 5$ va $L_2: y = -2x + 1$ to'g'ri chiziqlari orasidagi o'tkir burchakni toping.

Yechish:

1. **Burchak koeffitsiyentlarini aniqlash:**o L_1 chizig'i uchun $k_1 = 3$.o L_2 chizig'i uchun $k_2 = -2$.2. Burchak tangensini hisoblash formulasini qo'llash: To'g'ri chiziqlar orasidagi ϕ burchagining tangensi formulasidan foydalanamiz:

$$\tan \phi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

3. Hisoblash:

Qiymatlarni formulaga qo'yamiz:

$$\tan \phi = \left| \frac{(-2) - 3}{1 + (3) \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{-5}{1 - 6} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right| = |1|$$

4.

$$\tan \phi = 1$$

Burchakni

topish:

Tangensi 1 ga teng bo'lgan burchak 45° (yoki radianda $\frac{\pi}{4}$) ga tengdir.

$$\phi = \arctan(1) = 45^\circ$$

Javob: Berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchak 45° ni tashkil etadi.**4.2. Fazodagi To'g'ri Chiziqlar Orasidagi Burchak (Vektorlar Usuli)****Masala:** Fazoda yo'naltiruvchi vektorlari $s_1 = (2, 1, -2)$ va $s_2 = (3, -4, 0)$ bo'lgan L_1 va L_2 chiziqlari orasidagi burchak kosinusini toping.**Yechish:**

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblash:

$$s_1 \cdot s_2 = (2)(3) + (1)(-4) + (-2)(0) = 6 - 4 + 0 = 2$$

2. **Vektorlarning uzunliklarini (modullarini) hisoblash:**

$$\bullet |s_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\bullet |s_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

3. Burchak kosinusini hisoblash formulasini qo'llash:

$$\cos \phi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|}$$

4. Hisoblash:

Qiymatlarni formulaga qo'yamiz:

Javob: Berilgan chiziqlar orasidagi burchakning kosinusi $\frac{2}{15}$ ga teng. Burchakning o'zi $\phi = \arccos(\frac{2}{15})$ bo'ladi.

5. Xulosa

Monotonlik va uzluksizlik matematik analizda o'zaro bog'liq tushunchalar bo'lgani kabi, **ikki chiziq orasidagi burchakni hisoblash** masalasi ham analitik geometriya va vektorlar nazariyasi bilan chambarchas bog'liqdir. Ushbu tezisda ta'kidlanganidek, chiziqlar orasidagi burchakni topish ularning yo'nalishlari o'rtasidagi tartibli munosabatni o'rganishga qaratilgan fundamental masaladir.

Monoton funksiyalar tartibli va limitga ega bo'lgan funksiyalar sinfini tashkil etgani kabi, to'g'ri chiziqlar ham aniq yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lib, bu ularning joylashuvida **barqarorlikni** ta'minlaydi. Burchakni hisoblashda qo'llaniladigan asosiy vosita **skalyar ko'paytma** bo'lib, u to'g'ri chiziqlarning **yo'naltiruvchi vektorlari** yoki tekislikda **normal vektorlari** orasidagi kosinusni aniqlashga yordam beradi.

Bu teorema matematik analiz, teskari funksiya, integral va limitlar nazariyasida muhim o'rin tutgani kabi, chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash usullari ham quyidagi sohalarda keng qo'llaniladi:

- **Fizika va texnika:** Ob'ektlarning traektoriyasini, kuch vektorlari orasidagi burchaklarni tahlil qilishda.

- **Kompyuter grafikasi:** 3D modellashda yuzalar orasidagi burchaklarni aniqlash va yorug'lik tushishini hisoblashda.

- **Muhandislik va robototexnika:** Konstruksiyalarning elementlari yoki robot manipulyatorlarining harakat burchaklarini aniqlashda.

- **Iqtisodiyot:** Narx–talab funksiyalarini, o'sish–pasayish jarayonlarini tahlil qilishda.

Xulosa qilib aytganda, vektorlar va analitik geometriya usullaridan foydalanish chiziqlar orasidagi burchak masalasini yechishning eng samarali yo'lidir. Bu nazariy natijalar amaliy masalalarni yechishda muhim hisoblash vositasini taqdim etadi.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. **Olimov H., Axmedov A.** Analitik geometriya kursidan ma'ruzalar to'plami. — Toshkent: O'qituvchi, 2005.
2. **Soatov Yo. U.** Oliy matematika. 1-qism: Analitik geometriya elementlari. — Toshkent: Yangi Asr Avlodi, 2012.
3. **Qudratov A.** Vektorli algebra va analitik geometriya. — Toshkent: Universitet, 2018.
4. **Fikhtengolts G. M.** Differensial va integral hisob asoslari. 1-tom. — Toshkent: O'qituvchi, 1982.
5. **Zorich V. A.** Matematicheskiy analiz. 1-tom. — Moskva: MTSNMO, 2017.
6. **Piskunov N. S.** Differensial va integral hisob. 1-qism. — Toshkent: O'qituvchi, 1993.
7. **Internet manbalari:** arxiv.uz, library.ziyonet.uz, khanacademy.org, google.com