РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОМ ШАРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Наурызбаева Ш.О.
naurizbaevashasanem@gmail.com
Сулайманова Н.Б.
nilufarsulaymanova000@gmail.com
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха.

https://doi.org/10.5281/zenodo.24445806

Аннотация. *Рассмотрена задача о распространении тепла в однородном шаре под действием импульсных источников, способных оказать мгновенное влияние в фиксированные моменты времени на процесс распространения тепла в шаре. В качестве математической модели приняты однородное уравнение теплопроводности с начальными и краевыми условиями, а также условием импульсного воздействия в фиксированные моменты времени. Решена задача существования решений такой смешанной задачи с импульсным воздействием и получены необходимые и достаточные условия при выполнении которых полученное решение становится периодическим с некоторым периодом.*

Ключевые слова: *распространение тепла, однородный шар, импульсные воздействия, смешанная задача, существование решения, периодические режимы, уравнение с частными производными, краевые условия.*

Введение. В современной теории дифференциальных уравнений и ее многочисленных приложениях особое место занимает исследование эволюционных процессов, состояние которых в фиксированные моменты времени подвергается кратковременным (импульсным) воздействиям. Подобные задачи естественным образом возникают в физике, механике, технике и биологии, в частности, при моделировании колебательных и тепловых процессов.

Основы теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и методы их качественного анализа заложены и развиты в фундаментальных трудах А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка, М. У. Ахмета, В. Г. Самойленко, К. К. Елгондиева и других исследователей. Вместе с тем исследование краевых задач математической физики, в частности процесса распространения тепла в однородных телах при наличии мгновенных источников тепла, представляет значительный теоретический и практический интерес.

Целью настоящей работы является построение точного аналитического решения задачи теплопроводности для однородного шара радиуса R с импульсным воздействием методом разложения в ряд, а также установление конструктивных необходимых и достаточных условий, при которых температурный режим в шаре становится периодическим по времени.

Исследуем задачу о распространении тепла в однородном шаре радиуса R, находящегося под воздействием источников тепла, способных мгновенно изменить температуру шара в некоторые фиксированные моменты времени.

1. Пусть начальная температура шара равна $\varphi(r)$, а температура на поверхности шара описывается функцией $\psi(r)$. В этом случае задача сводится к интегрированию уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2(u_{xx} + \frac{1}{r}u_r), \qquad t \neq t_p, \quad 0 < r \leq R \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta u(t,r)\big|_{t=t_p} = I_p(r), \qquad 0 < r \leq R \tag{2}$$

при граничном условии

$$u(t,r)\big|_{r=R} = \psi(t), \qquad t \in [0,+\infty) \tag{3}$$

и начальном условии

$$u(0,r) = \varphi(r), \qquad 0 \leq r \leq R \tag{4}$$

Если произвести замену $\upsilon = ru$ то задача (1)-(4) сведётся к задаче интегрирования уравнения вида

$$\upsilon^2 = a^2\upsilon_{rr}, \quad t \neq t_p, \quad 0 \leq r \leq R \tag{5}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta\upsilon(t,r)\big|_{t=t_p} = rI_p(r), \qquad p = 1,2,..., \tag{6}$$

при граничных условиях

$$\upsilon(t,0) = 0, \quad \upsilon(t,R) = R\psi(t), \qquad t \in [0,+\infty) \tag{7}$$

и начальном условии

$$\upsilon(0,r) = r\varphi(r), \quad 0 \leq r \leq R \tag{8}$$

Решение задачи (5)-(8) будем искать виде ряда

$$\upsilon(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi r}{R}, \tag{9}$$

где

$$T_n(t) = \frac{2}{R}\int_0^R \upsilon(t,r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr \tag{10}$$

Дифференцируя (10), в силу уравнения (5) находим

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{R}\int_0^R \upsilon_t(t,r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr = \frac{2a^2}{R}\int_0^R \upsilon_{rr}(t,r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr$$

т.е.

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2a^2}{R}\int_0^R \upsilon_{rr}(t,r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr \tag{11}$$

Выполняя дважды интегрирование по частям в правой части равенства (10), в силу граничных условий (7) и равенства (11), получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}T_n(t) = (-1)^{n+1}n\pi\frac{2a^2}{R}\psi(t), \qquad t \neq t_p \tag{12}$$

При $t = t_p$ из условия импульсного воздействия (6), и из (9), (11) следует

$$\Delta T_n(t)\big|_{t=t_p} = \frac{2}{R}\int_0^R rI_p(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr \tag{13}$$

а из начального условия (8) и из (10), получим

$$T_n(0) = \frac{2}{R}\int_0^R r\varphi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr \tag{14}$$

Таким образом, для определения коэффициентов ряда (9) мы имеем линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (12) с импульсным воздействием (13).

Решая это уравнение при начальном условии (14), находим

$$T_n(0) = \frac{2}{R}\left(\int_0^R r\varphi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\right)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}t\right) +$$
$$+\int_0^t \frac{(-1)^{n+1}2a^2n\pi}{R}\psi(\tau)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(t-\tau)\right)d\tau +$$
$$+\frac{2}{R}\sum_{0<t_p<t}\left(\int_0^R rI_p(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\right)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(t-t_p)\right) \tag{15}$$

где $n,\ k = 0,1,2,\ldots, t\in[t_k;t_{k+1}), t_0 = 0$.

Подставляя теперь (15) в (9) и разделяя обе части полученного равенства на r, получаем решение задачи (1)-(4) в виде

$$u(t,r) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}\left\{\int_0^R r\phi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}t\right)+\right. \tag{16}$$
$$+(-1)^{n+1}n\pi a^2\int_0^t\psi(\tau)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(t-\tau)\right)d\tau +$$
$$\left.+\sum_{0<t_p<t}\left(\int_0^R rI_p(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\right)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(t-t_p)\right)\right\}$$

где $t\in[t_k;t_{k+1}),\ k = 0,1,2,\ldots$

В частности, если начальная температура шара равна нулю, а температура поверхности шара постоянна и равна u_0, то закона распространения тепла в таком однородном шаре с импульсным воздействием можно представить в виде

$$u(t,r) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}\left\{(-1)^n\frac{2Ru_0}{n\pi}\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}t\right)-(-1)^n\frac{2Ru_0}{n\pi}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{R}\sum_{0<t_p<t}\left(\int_0^R rI_p(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\right)\exp\left(-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(t-t_p)\right)\right\},$$

где $k = 0,1,2,\ldots, t\in[t_k;t_{k+1})$.

Условия периодичности. В различных практических приложениях особый интерес представляет определение условий, при которых процесс теплопроводности в однородном шаре под действием импульсных источников становится периодическим во времени. Математической моделью данного процесса является задача (1)–(4).

В этом контексте условия периодичности можно выразить через величины и моменты импульсных воздействий. Будем считать, что решение $U(t,r)$ задачи (1)–(4) непрерывно справа по переменной t в точках множества

$$J = \left\{ \left(t_p, r \right) : 0 < r < R, p \in N \right\}.$$

Теорема 1 (необходимые условия). Пусть задача (1)-(4) по переменной t имеет периодическое с некоторым периодом $T > 0$ решение $U^*(t,r)$. Тогда существует натуральное число m такое, что для всех натуральных p выполняются условия периодичности вида

$$t_{p+m} = t_p + T, \quad I_{p+m}(r) = I_p(r), \quad \forall r \in (0,R). \tag{17}$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $t_{p_0} \in J$, p_0 – некоторое натуральное число, и $I_{p_0}(r)$ тождественно неравно нулю в $(0,R)$, то существует $p_1 \in N$ такое, что $t_{p_1} \in J$ и $t_{p_1} = t_{p_0} + T$.

Предположим противное. Если $(t_{p_0} + T, r) \notin J$, то функция $U^*(t,r)$ является непрерывной по t в точке $(t_{p_0} + T, r)$, в то время как $U^*(t,r)$ имеет разрыв первого рода в точке (t_{p_0}, r) причём в силу (1) и (4) выполняется равенство

$U^*(t_{p_0} + 0, r) - U^*(t_{p_0} - 0, r) = I_{p_0}(r) \neq 0$, $r \in (0,R)$, что с учётом предположения о периодичности функции $U^*(t,r)$ по переменной t приводит к противоречию.

Таким образом, если $(t_{p_0}, r) \in J$, то существует $(t_{p_1}, r) \in J$ такое, что $t_{p_1} = t_{p_0} + T$.

Обозначим $p_1 - p_0 = m \geq 1$. Тогда в силу произвольности точки $(t_{p_0}, r) \in J$ равенства $t_{p+m} = t_p + T$ выполняются для всех $p \in N$.

Рассмотрим теперь значение функции $U^*(t,r)$ в точках (t_{p_0}, r) и $(t_{p_0} + T, r)$, где $p_0 \in N$ произвольно и $r \in (0,R)$. Тогда в силу периодичности функции $U^*(t,r)$ справедливы равенства:

$$U^*(t,r) \equiv U^*(t+T,r), t \in (t_{p_0-1}, t_{t_0+1}) \setminus \{t_{p_0}\},$$

$$U^*(t_{p_0} + 0, r) = U^*(t_{t_{p_0}} + T + 0, r),$$

$$U^*(t_{p_0} - 0, r) = U^*(t_{t_{p_0}} + T - 0, r)$$

Из этих равенств и из условия импульсного воздействия (2), следует

$$I_{p_0}(r) = U^*(t_{p_0} + 0, r) - U^*(t_{p_0} - 0, r) = U^*(t_{t_{p_0}} + T + 0, r) - U^*(t_{t_{p_0}} + T - 0, r) = I_{p_0+m}(r).$$

Учитывая, что p_0 – произвольное, отсюда получим $I_{p+m}(r) = I_p(r)$ для всех $p \in N$.

Теорема 2 (Достаточные условия существования периодических решении). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для существования периодического с периодом $T > 0$ решения задачи (1)-(4) достаточны, чтобы величины и моменты импульсных воздействий были связаны с начальными данными посредством равенства

$$\int_0^R r\phi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr=\left(1-e^{-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}T}\right)^{-1}\left((-1)^{n+1}n\pi a^2\int_0^T\psi(\tau)e^{-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}(T-\tau)}d\tau+\sum_{k=1}^{q}\int_0^R rI_k(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dre^{-\frac{-a^2n^2\pi^2}{R^2}t_k}\right)$$

Доказательство теоремы 2 следует из тождества $U(t+T,r)\equiv U(t,r)$ с учётом условий (17).

Литературы

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-Linear Sciences. Ser. A. V.14. –Singapore: World Scientific. -1995. 462 p.
2. Akhmet M.U. Li–Yorke chaos in the system with impacts// J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), P. 804–810.
3. Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. №2(2). P.635-639.
4. Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. №2(2). P.635-639.
5. Samoilenko V.G., Elgondyev K.K. On periodic solutions of linear differential equations with pulsedh influence, Ukr. Math. J., 49 (1997), P. 156–164.
6. Lakshmikanthain V., Baynov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulsive differential equations. Singapore, 1989.
7. Skripnik N.V. Averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-handside, Mat.Stud., 55 (2021), 1, P.76–84.
8. Самойленко В.Г., Елгондиев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2. Припринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.
9. Елгондиев К.К. Распространение тепла в однородном шаре по действием импульсных источников. // Докл. АН Руз. 2003, №1. –С.18-20.
10. Elgondiev K.K. Oscillatory processes under impulsive perturbations, Mat.Stud., 65 (2026), 107-112.
11. Elgondiev K.K., Kamalova O.X. Existence of periodic solutions to second-order linear differential equation systems with impulsive effects, Science and Education in Karakalpakstan., 2026 № 3/1 ISSN 2181-9203