

INTEGRAL TENGSIKLIKAR VA ULARNI OLIMPIADA MASALALARIGA TATBIQLARI

Sattorov E

O'zbekiston-Finlandiya pedagogika institute.

Abdullayev I

O'zbekiston-Finlandiya pedagogika institute.

ibrohimabdullayev003@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15186029>

Annotatsiya. Ushbu maqolada integral tengsizliklar va ularning talabalar olimpiadalaridagi qo'llanilishiga bag'ishlangan keng ko'lamli tahlillar beriladi. Integral tengsizliklar matematik analizning muhim qismi bo'lib, ular murakkab funksiyalar va ularning integrallari o'rtasidagi bog'lanishlarni o'rganishda foydalaniladi. Olimpiada masalalarida integral tengsizliklar yordamida yuqori darajadagi matematik murakkabliklarni yechish ko'nikmasini shakllantirish muhim ahamiyatga ega.

Maqolada talabalar olimpiadalarida tez-tez uchraydigan integral tengsizlik turlari va ularning yondashuv usullari keng yoritiladi. Ayniqsa, Gyolder tengsizligi, Chebishev tengsizligi va Koshi-Shvarts tengsizligi kabi mashhur integral tengsizliklar misollar asosida tushuntiriladi. Bu tengsizliklar yordamida olimpiada masalalarini yechish strategiyalarini chuqur tahlil qilish, talabalar uchun masalalarni samarali hal qilish va matematik fikrlashni rivojlantirishda katta rol o'ynaydi.

Shuningdek, maqolada integral tengsizliklarni yechish jarayonida foydalaniladigan usullar – limitlar, hosilalar va integrallarni qo'llash orqali natijalarni baholash texnikalari – batafsil yoritiladi. Talabalar olimpiadalarida yuqori natijalarga erishish uchun matematik analizdagi tengsizliklar va ularning optimal yechimlari haqida chuqur tushuncha beriladi. Har bir integral tengsizlik bo'yicha keltirilgan misollar nafaqat nazariy bilimlarni mustahkamlashga, balki amaliyotda qo'llash ko'nikmalarini shakllantirishga ham yordam beradi.

Maqola olimpiadaga tayyorgarlik ko'rayotgan talabalar uchun foydali qo'llanma bo'lib, ularni murakkab masalalar bilan ishlash, ularga kreativ yondashish va matematik fikrlash qobiliyatlarini oshirishga undaydi. Shu bilan birga, olimpiadalarda muvaffaqiyatli ishtirok etish uchun integral tengsizliklarning nazariy va amaliy ahamiyati batafsil ochib beriladi.

Ushbu maqolada integral tengsizliklarni olimpiada masalalariga tatbiqlari bayon etilgan.

Kalit so'zlar: uzluksizligi, integrallanuvchiligi, monotonligi, differensiallanuvchiligi, Koshi-Shvarts, Gyolder, Chebishev tengsizliklari.

INTEGRAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS TO OLYMPIAD PROBLEMS

Abstract. This article provides a comprehensive analysis of integral inequalities and their applications in student olympiads. Integral inequalities are a key part of mathematical analysis and are used to study the relationships between complex functions and their integrals. Developing the skill of solving high-level mathematical complexities through integral inequalities is crucial in olympiad problems.

The article extensively covers the types of integral inequalities that frequently appear in student olympiads and the methods of approaching them. Notably, well-known integral inequalities such as Hölder's inequality, Chebyshev's inequality, and Cauchy-Schwarz inequality are explained with examples. These inequalities play a significant role in deepening the analysis of problem-solving strategies and enhancing students' ability to solve problems effectively while improving mathematical thinking.

Furthermore, the article elaborates on the techniques used in solving integral inequalities, such as limits, derivatives, and integrals, which help in estimating results. A deep understanding of these inequalities and their optimal solutions in mathematical analysis is crucial for achieving high results in student olympiads. The examples provided for each integral inequality not only reinforce theoretical knowledge but also aid in developing practical application skills.

This article serves as a useful guide for students preparing for olympiads, encouraging them to work on complex problems, approach them creatively, and enhance their mathematical reasoning skills. In addition, it thoroughly explains the theoretical and practical significance of integral inequalities for successful participation in olympiads.

The applications of integral inequalities to olympiad problems are presented in this article.

Keywords: continuity, integrability, monotonicity, differentiability, Cauchy-Schwarz, Hölder, Chebyshev inequalities.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОЛИМПИАДНЫМ ЗАДАЧАМ

Аннотация. В статье дается комплексный анализ интегральных неравенств и их применения в студенческих олимпиадах. Интегральные неравенства являются важной частью математического анализа и используются для изучения взаимосвязей между сложными функциями и их интегралами. Важно развивать умение решать сложные математические задачи с использованием интегральных неравенств в олимпиадных задачах.

В статье дается комплексный обзор типов интегральных неравенств, часто встречающихся на студенческих олимпиадах, и методов их решения. В частности, на примерах объясняются такие известные интегральные неравенства, как неравенство Гёльдера, неравенство Чебышева и неравенство Коши-Шварца. Этот углубленный анализ стратегий решения олимпиадных задач с использованием неравенств играет важную роль в эффективном решении задач для учащихся и развитии математического мышления.

В статье также подробно рассматриваются методы, используемые в процессе решения интегральных неравенств — приемы оценки результатов с помощью пределов, производных и интегралов. Для достижения высоких результатов на студенческих олимпиадах необходимо глубокое понимание неравенств математического анализа и их оптимальных решений. Приведенные примеры к каждому интегральному неравенству помогают не только закрепить теоретические знания, но и развить навыки их практического применения.

Статья является полезным пособием для учащихся, готовящихся к олимпиаде, побуждая их работать со сложными задачами, подходить к ним творчески и совершенствовать навыки математического мышления. При этом подробно поясняется теоретическое и практическое значение интегральных неравенств для успешного участия в олимпиадах.

В статье описываются приложения интегральных неравенств к олимпиадным задачам.

Ключевые слова: непрерывность, интегрируемость, монотонность, дифференцируемость, неравенства Коши-Шварца, Гёльдера, Чебышева.

Koshi-Shvarts tengsizligi: f va g funksiyalar (a,b) oraliqda kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

1-misol: $f:[0,1] \rightarrow R$ uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx$$

Yechim: Koshi-Shvarts tengsizligiga asoslangan holda:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

$a = 0$ $b = 1$ $f(x) = f(x)$ $g(x) = 1$ deb olsak

$$\left(\int_0^1 f(x) \cdot 1 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right) \left(\int_0^1 1^2 dx \right)$$

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)$$

Yuqorida berilgan tengsizlik isbotlandi. (1-158-bet)

2-misol: $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya bo'lsin, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ va $\int_0^1 xf(x) dx = 1$

bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$$

Yechim:

$$\left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$$

$$g(x) = ax + b \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 = (a + b)^2 = 16$$

$$f(x) \sim g(x)$$

$$\begin{cases} \int_0^1 (ax + b) dx = 1 \\ \int_0^1 x(ax + b) dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (6x - 2)^2 dx = \int_0^1 (36x^2 - 24x + 4) dx = 4$$

$$4 \int_0^1 f^2(x) dx \geq 16$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$$

Isbotlandi.

Gyolder tengsizligi: f va g funksiylar (a, b) oraliqda integrallanuvchi funksiylar bo'lsin va $p, q > 1$ uchun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ shart bajarilsa, quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx \right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

1-misol: $f(x)$ funksiya $(0,1)$ da musbat uzluksiz funksiya bo'lsa. Quyidagini ifodani maksimal qiymatini toping:

$$\frac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f^3(x)dx}$$

Yechim: Gyolder tengsizligi orqali

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\left(\int_0^3 f(x) \cdot 1 dx\right) \leq \left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^3 1^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\int_0^3 f(x)dx\right) \leq 3^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)}{\left(\int_0^3 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}} \leq 3^{\frac{2}{3}}$$

Javob: Bundan ko‘rinib turibdiki, yuqoridagi ifodaning maksimal qiymati $3^{\frac{2}{3}}$ ga teng. (1-158-bet)

2-misol: $f:[0,1] \rightarrow [0, \infty)$ integrallanuvchi funksiya bo‘lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx \leq \int_0^1 f^3(x)dx$$

Yechim:

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx \leq \int_0^1 f^3(x)dx \int_0^1 1dx$$

Gyolder tengsizligiga ko‘ra:

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$p = 3 \quad q = \frac{3}{2} \quad \left(\int_0^1 f^3(x)dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 1^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} \geq \int_0^1 f(x)dx \geq 0$$

$$p = \frac{3}{2} \quad q = 3 \quad \left(\int_0^1 (f^2(x))^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 1^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \geq \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$$

Hosil bo'lgan tengsizliklarni ko'paytirib yuboramiz va quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx \leq \int_0^1 f^3(x)dx$$

Gyolder tengsizligi orqali isbotlandi.

Chebeshev tengsizligi: f va g funksiyalar R da monoton funksiyalar bo'lsin va barcha haqiqiy a, b sonlar uchun $a < b$ shart bajarilsa, quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$(b-a) \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) \geq \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right)$$

1-misol: Barcha x, y ($x > y$) haqiqiy musbat sonlar va m, n butun musbat sonlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$(m-1)(n-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x)$$

Yechim:

$$(m-1)(n-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x)$$

$$mn(x-y)(x^{m+n-1} - y^{m+n-1}) \geq (m+n-1)(x^m - y^m)(x^n - y^n)$$

$$\frac{x^{m+n-1} - y^{m+n-1}}{(m+n-1)(x-y)} \geq \frac{x^m - y^m}{m(x-y)} \cdot \frac{x^n - y^n}{n(x-y)}$$

$$(x-y) \int_y^x t^{m+n-2} dt \geq \int_y^x t^{m-1} dt \cdot \int_y^x t^{n-1} dt$$

$$f(x) = t^{m-1} \quad g(x) = t^{n-1}$$

$$(b-a) \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) \geq \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right)$$

Chebeshev tengsizligiga ko'ra isbotlandi. (1-159-bet)

2-misol: $f: [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ kamayuvchi funksiya bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\int_0^1 x f^2(x)dx \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x f(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx$$

Yechim: $\forall x, y$ haqiqiy sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$(f(x) - f(y))(x - y) \leq 0$$

Tengsizlikni ikkala tomoni ham $f(x)f(y)$ ga ko'paytirib yuboramiz, f musbat aniqlanganligi uchun tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi:

$$f(x)f(y)(f(x) - f(y))(x - y) \leq 0$$

Hosil bo'lgan tengsizlikni integrallab yuboramiz:

$$\int_a^b \int_a^b f(x)f(y)(f(x) - f(y))(x - y) dx dy \leq 0$$

$$\int_a^b \int_a^b (x f^2(x) f(y) + y f(x) f^2(y) - y f^2(x) f(y) - x f(x) f^2(y)) dx dy \leq 0$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b x f^2(x) dx \int_a^b f(y) dy + \int_a^b y f^2(y) dy \int_a^b f(x) dx - \\ & - \int_a^b y f(y) dy \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b x f(x) dx \int_a^b f^2(y) dy \leq 0 \\ & 2 \int_a^b x f^2(x) dx \int_a^b f(y) dy - 2 \int_a^b y f(y) dy \int_a^b f^2(x) dx \leq 0 \end{aligned}$$

$$\int_a^b x f^2(x) dx \int_a^b f(y) dy \leq \int_a^b y f(y) dy \int_a^b f^2(x) dx$$

Hosil bo'lgan tengsizlikni quyidagi ko'rinishda ifodalab olamiz va yuqorida berilgan tengsizlikni hosil qilamiz:

$$a = 0 \quad b = 1 \quad y = x \quad f(y) = f(x)$$

$$\int_0^1 x f^2(x) dx \int_0^1 f(x) dy \leq \int_0^1 x f(x) dy \int_0^1 f^2(x) dx$$

Isbotlandi.

REFERENCES

1. Razvan Gelca Titu Andreescu „Putnam and Beyond” Springer 2007.(157-158-bet)
2. Попов.И.Ю ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ Санк-Петербург 2008
3. International Mathematics Competition for University Students 1994-2013
4. Hodjiyev.S.H Jo'rayeva.N.O Matematik analizning asosiy tushunchalari “KAMOLOT” nashriyoti BUXORO-2023
5. Azlarov.T Mansurov.X Matematik analiz TOSHKENT “O'qituvchi” 1994