

LOKAL OLSHEWLI OPERATORLAR ALGEBRASINIŇ 2-LOKAL DIFFERENTIALLAWLARI

Otepbergenova D.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti 2-kurs magistrantı.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15364998>

Annotaciya. Bul maqalada 2-lokal ólshewli operatorlar algebrasınıń lokal differenciallanıwı túsiniǵı hám onıń tiykarǵı qásiyetleri úyreniledi. Algebralıq strukturalar hám operatorlar algebrasınıń lokal differenciallanıwı túsiniǵı keltirilip, onıń ózine tán qásiyetleri talqılanadı. Nátiyjeler teoriyalıq jaqtan dálillenip, tiyisli mısallar menen bekkemlenedi.

Gilt sózler: 2-lokal ólshewli operatorlar algebrası, lokal differenciallaw, operatorlar algebrası, algebralıq dúzilisler, differencial operatorlar.

АЛГЕБРА ЛОКАЛЬНЫХ РАЗМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. В статье изучается понятие локального дифференцирования алгебры 2-локальных измеримых операторов и его основные свойства. Изложено понятие локального дифференцирования алгебраических структур и алгебры операторов и проанализированы его особенности. Результаты обоснованы теоретически и подкреплены соответствующими примерами.

Ключевые слова: алгебра 2-локальных измеримых операторов, локальное дифференцирование, алгебра операторов, алгебраические структуры, дифференциальные операторы.

ALGEBRA OF LOCAL DIMENSIONAL OPERATORS

Abstract. This article studies the concept of local differentiation of 2-local measurable operator algebras and its main properties. The concept of local differentiation of algebraic structures and operator algebras is introduced and its specific properties are analyzed. The results are theoretically proven and supported by relevant examples.

Keywords: 2-local measurable operator algebra, local differentiation, operator algebra, algebraic structures, differential operators.

Bul bólimde biz fon Neyman algebraları hám onıń subalgebralarına qarata lokal ólshewli operatorlar algebrasında 2-lokal differenciallawlardı táriyiplew ushın 3.2.1 teoremasın qollaymız.

[23, Juwmaq 3.11] ta dálillengen, eger associativ algebra (kolco) óz ishine A birlikti alǵan A kommutativ bolmaǵan ápiwayı subalgebranı (subkalco) óz ishine alsa, onda hár qanday M –bimodulǵa A Jordan differenciallawı A differenciallawı boladı, yaǵnıy A (J) qásiyetin qanaatlanıradı. Tiykarınan, eger A_0 $n \geq 2$ ǵa izomorf bolǵan $M_n(C)$ hám A birlikti óz ishine alǵan subalgebra bar bolsa, A onda A (J) qásiyetin qanaatlanıradı [23].

Bul bólimniń tiykarǵı nátiyjelerinen biri tómendegiler

3.3.1 teorema. Meyli M – Abel tuwrıdan-tuwrı qosındıarisız qálegen fon Neyman algebrası hám $LS(M) - M$ ǵa qarata barlıq lokal ólshewli operatorlar algebrası. Onda $LS(M)$ nan alıńǵan hár qanday M 2-lokal differenciallawı Δ differenciallaw esaplanadı.

Dálilleniwi. Meyli $z - M$ da oraylıq proyektor. Sebebi $D(z) = 0$ hár qanday differenciallaw ushın, hár qanday D 2 – lokal differenciallawı Δ ushın M kiriwi $LS(M)$ anıq

$\Delta(z) = 0$. $x \in M$ bolsın hám D – dan sonday $\Delta(zx) = D(zx)$ qılıp $LS(M)$ differenciallaw M , $\Delta(x) = D(x)$.

Onda mına teńlikke iye bolamız $\Delta(zx) = D(zx) = D(z)x + zD(x) = z\Delta(x)$. Bul hár bir 2-lokal differenciallawı Δ hár bir oraylıq proyektor $z \in M$ ushın zM $zLS(M) \cong LS(zM)$ bolıwın ańlatadı. Sonday etip, biz zM nan alınğan Δ sheklewdi kórip shıǵıwımız múmkin. Sonday-aq Abel tuwrıdan-tuwrı qosındıları bolmağan ıxtıyaryy fon Neyman algebrası tuwrıdan-tuwrı qosındıǵa ajralıwı múmkinligi sebepli I_n , $n \geq 2$ tip, I_∞ tip, II hám III tiplerdi bólek kórip shıǵıwımız múmkin.

Eger I_n tipindegi $n \geq 2$ M – fon Neyman algebrası, keyin 1.1.1 teoremadan M nan alınğan hár qanday 2-lokal differenciallawı $LS(M) \equiv S(M)$ differenciallawı ekenligi kelip shıǵadı.

Meyli fon Neyman algebrası M I_∞ , II yamasa III tiplerinen biri bolsın. Keyin lemma 1.1.1 di I_∞ tiptegi algebralar ushın hám lemma 1.1.2 ni II yaki III tiptegi algebralar ushın qollasaq, M nan alınğan birlik algebralar e_1, e_2, e_3 óz-ara ekvivalent ortogonal proyeksiyalar qosındısı M sıpatında ańlatıw múmkin degen nátiyjege kelemiz. Onda bul $x \mapsto \sum_{i,j=1}^3 e_i x e_j$

sáwlelendiriw M algebrası hám $M_3(A)$ matricalıq algebrası arasındǵı izomorfizmdi belgileydi M , bul jerde $A = e_{1,1} M e_{1,1}$. Bunnan tısqari, $LS(M)$ algebrası $M_3(LS(A))$ algebra ushın izomorf. Sonday-aq, A algebrası M algebrası menen birdey tipke iye hám sonıń ushın $M_3(C)$ izomorfliq subalgebrası bar. Demek, A algebrası (J) qásiyetin qanaatlanıradı. Demak 3.2.1 teoremadan, $LS(M)$ nan alınğan hár qanday 2-lokal differenciallawı M differenciallawı ekenligi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Abel fon Neyman algebrasındaǵı hár qanday differensiallaw trivial ekenligin esapqa alsaq, 3.3.1 teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı ([10, teorema 2.1] hám [9, teorema 3.1]).

Nátiyje 3.3.1. Meyli M - ıxtıyaryy fon Neyman algebrası. Onda Δ hár qanday 2-lokal differenciallawı M da differenciallanadı.

Hár bir $x \in LS(M)$ ushın $s(x) = l(x) \vee r(x)$ orınlı, bul jerde $l(x)$ hám $r(x)$ x funkciyanıń oń hám shep tasıwshıları.

Lemma 3.3.1. Meyli B – $LS(M)$ da subalgebra, bunda $M \subseteq B$ hám $\Delta: B \rightarrow LS(M)$ 2-lokal differenciallawı bolsın, bunda $\Delta|_M \equiv 0$. Onda $\Delta \equiv 0$.

Dálilleniwi. Dáslep $x \in B \cap S(M)$ ıxtıyaryy elementin alayıq. Meyli $|x| = \int_0^\infty \lambda d e_\lambda$ –

spektral bóliniw bolsın. Solay etip $x \in S(M)$, onda $e_n^\perp$ – jeterlishe úlken n ushın shekli proyektor. Sonday $\Delta(x) = D_{x, x e_n}(x)$ hám

$\Delta(x e_n) = D_{x, x e_n}(x e_n)$ $n \in \mathbb{N}$ differencialnı alayıq $D_{x, x e_n}$. Sebebi bul $x e_n \in M$, barlıq $n \in \mathbb{N}$ ushın sonday $\Delta(x e_n) = 0$. Bizde

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta(x) - \Delta(xe_n) = D_{x,xe_n}(x) - D_{x,xe_n}(xe_n) = \\ &= D_{x,xe_n}(x - xe_n) = D_{x,xe_n}(xe_n^\perp).\end{aligned}$$

Meyli Φ – barlıq proyektorlar M tarmağındagı keñeytirilgen oraylıq reshetka $P(M)$ ([44]). Lemma 1.2.1 dan paydalanıp, tómendegige iye bolamız

$$\begin{aligned}\Phi(s(\Delta(x))) &= \Phi(s(D_{x,xe_n}(xe_n^\perp))) \leq 3\Phi(s(xe_n^\perp)) = 3\Phi(l(xe_n^\perp) \vee r(xe_n^\perp)) \leq \\ &\leq 3\Phi(l(xe_n^\perp)) + 3\Phi(r(xe_n^\perp)) \leq 6\Phi(e_n^\perp) \downarrow 0,\end{aligned}$$

hám bunnan $\Delta(x) = 0$.

Endi $x \in B$ elementin alayıq. Lokal ólshewli operatorıń anıqlamasına kóre, M da $\{z_n\}$ sonday $z_n \uparrow 1$ hám $xz_n \in S(M)$ barlıq $n \in N$ ushın oraylıq proyeksiyalar izbe-izligi bar (1.1.2 anıqlamağa qarań). Aldıńǵı jaǵdaydı esapqa alsaq, tómendegi teńlikti alamız

$$\begin{aligned}z_n \Delta(x) &= z_n D_{x,z_n x}(x) = D_{x,z_n x}(z_n x) - D_{x,z_n x}(z_n) x = \\ &= D_{x,z_n x}(z_n x) = \Delta(z_n x) = 0,\end{aligned}$$

yaǵnıy barlıq $n \in N$ ushın $z_n \Delta(x) = 0$ boladı. Sonıń ushın $\Delta(x) = 0$. Lemma dálillendi.

3.3.2 teorema. Meyli M – Abel tuwrıdan-tuwrı qosındıarsız ıxtıyariy fon Neyman algebrası hám B – $LS(M)$ da subalgebra bolsın, bunda $M \subseteq B$. Onda Δ qálegen 2-lokal differencialı B da differenciallanıwshı boladı.

Dálilleniwi. 3.3.1 teoremadan Δ 2-lokal differencialdın $\Delta|_M$ shekleniwi $LS(M)$ da M differenciallawı boladı. 1.2.4 teoremağa kóre, differencialın biz $\Delta|_M$ menen B $LS(M)$, belgilengen D differensiallanıwǵa keñeytiriw múmkin. 2-lokal differenciallanıwı M da $\Delta - D$ nolge teń bolǵanlıǵı sebepli, 3.3.1-Lemmadan $\Delta \equiv D$ kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Eskertiw 3.3.1. Itibar beriń, 2.2.2 teoremada atom bolmaǵan reshetkalı $P(M)$ Abel fon Neyman algebrası ushın M algebra $S(M)$ differencial bolmaǵan 2-lokal differenciallardı qabil qıladı.

REFERENCES

1. Kadison, R.V., Ringrose, J.R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.
2. Sinclair, A.M., Smith, R.R. Hochschild Cohomology of von Neumann Algebras.
3. Arens, R. Opera.
4. Tional Calculus in Banach Algebras.