NEW RENAISSANCE international scientific journal
ResearchBib IF - 11.01, ISSN: 3030-3753, Volume 2 Issue 7

C^k – СВОЙСТВА ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Гадаев С.А.
Гайвиева Н.
Чориев Ш.
Ташкентский университет социальных инноваций, ул. Узумзор, 37, Ташкент, 100015, Узбекистан, **sokhibgadayev@gmail.com**
Национальный университет Узбекистана, ул. Университет, 4, Ташкент, 100174 Узбекистан, **@noilagayviyeva2@gmail.com**
Национальный университет Узбекистана, ул. Университет, 4, Ташкент, 100174 Узбекистан, **shoxruzchoriyev2001@gmail.com**
https://doi.org/10.5281/zenodo.15833856

Аннотация. *В данной работе обсуждаются вопросы, связанные со свойствами дифференцируемости логарифмический потенциалов, и изучается аналог теоремы Киши для логарифмический потенциала. Также доказывается, что при некоторых достаточных условиях, наложенных на Лебегов меру* μ, *логарифмической потенциал* $U_l^\mu(x)$ *принадлежит классу* $C^k(E)$.

Ключевые слова: *потенциал Рисса, логарифмический потенциал, дифференцируемость потенциалов, теорема Картана, теорема Киши, теорема Лузина о непрерывности ёмкостей, класс* $C^k(E)$.

LOGARIFMIK POTENSIALLAR UCHUN C^k – LUZIN XOSSALARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada logarifmik potentsiallarning differensiallanuvchanlik xossalari bilan bog‘liq masalalar va logarifmik potensial uchun Kishi teoremasining analogi o‘rganilgan. Shuningdek,* μ *Lebeg o‘lchoviga qo‘yilgan ba’zi etarli shartlarda* $U_l^\mu(x)$ *logarifmik potentsial* $C^k(E)$ *sinfiga tegishli ekanligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *Riss potensiali, logarifmik potensial, potensiallarning differensiallanuvchanligi, Kartan teoremasi, Kishi teoremasi, sig‘imlar uchun Luzinning uzluksizlik teoremasi,* $C^k(E)$ *sinfi.*

C^k – LUZIN PROPERTIES FOR LOGARITHMIC POTENTIALS

Abstract. *In this paper, we discuss issues related to the properties of differentiability of logarithmic potentials and an analogue of the Kishi’s theorem for logarithmic potential is studied. It is also proved that under some sufficient conditions imposed on the Lebesgue measure* μ, *the logarithmic potential* $U_l^\mu(x)$ *belongs to the class* $C^k(E)$.

Keywords: *Riesz potential, logarithmic potential, differentiability of potentials, Cartan’s theorem, Kishi’s theorem, Luzin’s theorem on the continuity of capacities, class* $C^k(E)$.

1.Введение

Рассмотрим следующего логарифмического потенциала в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$U_l^\mu(x) = \int \ln|x-y| d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где μ – конечная борелевская мера с компактным носителем $S_\mu \subset\subset \mathbb{R}^n$.

NEW RENAISSANCE international scientific journal
ResearchBib IF - 11.01, ISSN: 3030-3753, Volume 2 Issue 7

В работе Картана [1] (см. также [2, стр. 231]) доказана следующая аналог $C-$свойства Лузина (см.[3, стр. 309]) для потенциалов Рисса:

$$U_{n-p}^{\mu}(x)=\int\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n}},\ x\in\mathbb{R}^{n},0<p<n.$$

Теорема 1 (Картан). Для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $O_{\varepsilon}\subset\mathbb{R}^{n}$ с ёмкостью $C_{n-p}(O_{\varepsilon})<\varepsilon$ такое, что потенциал $U_{n-p}^{\mu}(x)$ является непрерывной в дополнении $\mathbb{R}^{n}\backslash O_{\varepsilon}$.

В работе [4] М.Киши доказал теорему Картана в случае более общего потенциала

$$U_{K}^{\mu}(x)=\int K(x,y)d\mu(y),\ x\in\mathbb{R}^{n}.$$

Здесь, также мера μ с компактным носителем и ядро $K(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}$, обладает следующими свойствами:

1) $K(x,y)-$ положительнозначная поли непрерывная снизу функция такое, что $K(x,x)=+\infty,\ \ x\in\mathbb{R}^{n}$ и непрерывная в $(\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n})\backslash\{(x,x),x\in\mathbb{R}^{n}\}$,

2) $K(x,y)-$симметрическая, т.е. $K(x,y)=K(y,x)$.

Согласно условию 2) всегда выполняется закон взаимности: для любых меры μ и ν с компактными носителями верна $\int U_{K}^{\mu}d\nu=\int U_{K}^{\nu}d\mu$.

Теорема 2 (Киши). Для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $O_{\varepsilon}\subset\mathbb{R}^{n}$ с ёмкостью $C_{K}(O_{\varepsilon})<\varepsilon$ такое, что потенциал $U_{K}^{\mu}(x)$ является непрерывной в дополнении $\mathbb{R}^{n}\backslash O_{\varepsilon}$.

Заметим, что в частности потенциал $U_{K}^{\mu}(x)$ может быть потенциалом Рисса или логарифмическим потенциалом с ядром

$$K(x,y)=\ln\frac{2R}{|x-y|},\ (x,y)\in B(0,R)\times B(0,R),$$

где $B(0,R)=\{x\in\mathbb{R}^{n}:|x|<R\}$ (см. например. [2],[4]).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. ([15, стр.160]). Для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $O_{\varepsilon}\subset\mathbb{R}^{n}$ с мерой Лебега $m(O_{\varepsilon})<\varepsilon$ такое, что

а) семейство функций $(T_{\delta}\mu)(x)$ сходится равномерно к $(T\mu)(x)$ при $\delta\to0$ на множестве $\mathbb{R}^{n}\setminus O_{\varepsilon}$.

б) семейства функций

$$\frac{\mu(B(x,t))}{m(B(x,t))}$$

сходится равномерно к $\mu'(x)$ при $t\to0$ на множестве $\mathbb{R}^{n}\setminus O_{\varepsilon}$.

Лемма 2. ([14, 171]). Пусть $\mu-$ конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$ и $\mu(t)=\mu(B(0,t))-$мера открытого шара $B(0,t)\subset\mathbb{R}^n$. Тогда для любой гладкой в интервале $(0,+\infty)$ функции $\varphi(t)$ и для любых чисел $a,b,\ 0<a<b<+\infty$, имеет место следующее соотношение, связывающее интеграл Лебега с интегралом Стилтьеса:

$$\int\limits_{a\le|x|\le b}\varphi(|x|)d\mu(x)=\int\limits_{[a,b]}\varphi(t)d\mu(t).$$

2. THE MAIN THEOREM OF THE PRESENT PAPER ISH THE FOLLOWING

В работах [5],[7],[8],[9] изучена дифференциальные свойства потенциалов Рисса и Бесова. В этой работе мы изучаем $C^k -$ свойства Лузина для логарифмических потенциалов.

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует открытое множество* $O_\varepsilon\subset\mathbb{R}^n$ *с Лебегова меры* $m(O_\varepsilon)<\varepsilon$ *такое, что логарифмический потенциал* $U_l^\mu(x)$ *принадлежит классу* $C^n(\mathbb{R}^n\backslash O_\varepsilon)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство теоремы 3. Нам достаточно доказать, что следующий логарифмический потенциал

$$u(x)=\int\ln|x-y|d\mu(y),\ x\in\mathbb{R}^n,$$

для конечной борелевской меры μ, сосредоточенной в единичном шаре

$$B=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\},\ supp\mu\subset B,$$

принадлежит классу $C^n(B\setminus O_\varepsilon)$, где O_ε некоторое открытое множество с мерой Лебега $m(O_\varepsilon)<\varepsilon.$

Ясно, что вне носителя $supp\mu$ этот потенциал является бесконечно дифференцируемым. Поэтому дифференцируемость потенциала $u(x)$ достаточно изучать в окрестности $supp\mu,$ скажем в $B=B(0,1)$. Сначала формально определим множество O_ε. Фиксируем точку $x\in B,$ где существует плотность $\mu'(x)$ и рассмотрим заряд $d\nu_x=d\mu(y)-\mu'(x)\chi_r(y)dy,\ r>1,$ где $B(0,r)=\{y\in\mathrm{R}^n:|y|<r\}$ и

$$\chi_r(y)=\begin{cases}1 & y\in B(0,r)\\ 0 & y\notin B(0,r).\end{cases}$$

Заряд $d\nu_x(y)$ (в общем случае неположительный) обладает тем свойством, что его плотность в точке x равна нулю. Существует две меры ν_x^+ и ν_x^- такие, что $\nu_x=\nu_x^+-\nu_x^-$ и $supp\nu_x^+\cap supp\nu_x^-=\varnothing$ (см. [2]). Обозначим

$$V(B(x,t))=\int_{B(x,t)}|d\nu_x(y)|,$$

где $|d\nu_x(y)|=d\nu_x^+(y)+d\nu_x^-(y)$. Для любого $\varepsilon>0$ в качестве $O_\varepsilon\subset B$ берём открытое множество с мерой Лебега $m(O_\varepsilon)<\varepsilon$ такое, что

1) $\mu'(x)\in C(\overline{B}\setminus O_\varepsilon)$;

2) $\dfrac{\partial^{|\alpha|}U_l^\mu(x)}{\partial x^\alpha}\in C(\overline{B}\setminus O_\varepsilon),\ |\alpha|=n.$

Здесь частные производные понимаются в смысле предела (2).

Для некоторой монотонно неубывающей функции $\gamma(t)>0,\ t\in(0,+\infty)$ $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$ имеют место следующие неравенства:

3) $V(B(x,t))\le\gamma(t)t^n,\quad x\in\overline{B}\setminus O_\varepsilon,$

где v_n − объём единичного шара.

4) $\left|\displaystyle\int_{|x-y|<t}\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha}\ln|x-y|\,d\mu(y)\right|\le\gamma(t),\quad x\in\overline{B}\setminus O_\varepsilon.$

В самом деле, существование множества O_ε удовлетворяющего условии 1) и 2) вытекает из того, что плотность борелевской меры и частные производные потенциала являются измеримыми функциями и значит согласно теоремы (C − свойство) Лузина непрерывны вне множества малой меры Лебега. Условия 3) и 4) выполняются в силу леммы 1.

В качестве $u^{(\alpha)}(x),\ 0<|\alpha|\le n$ определенных на компакте $\overline{B}\setminus O_\varepsilon$ (см. определение класса C^k), мы будем брать частные производные потенциала $u(x)$, определенные как в параграфе 2. Легко можно убедиться, что функция $u^{(\alpha)}(x),\ 0<|\alpha|\le n$ определена и принимает конечное значение в каждой точке компакта $\overline{B}\setminus O_\varepsilon$.

Теперь на компакте $\overline{B}\setminus O_\varepsilon$ рассмотрим разностей

$$R_\alpha(x,h)=u^{(\alpha)}(x+h)-\sum_{|\alpha+\beta|\le n}\frac{u^{(\alpha+\beta)}(x)}{\beta!}h^\beta,\ |\alpha|\le n.$$

Здесь $u^{(0)}(x)\equiv u(x)$.

Берём произвольную точку $x^0\in\overline{B}\setminus O_\varepsilon$ и разложим потенциал $u(x)$ на две части

$$u(x)=\int\ln|x-y|\,d\nu_{x^0}(y)+\mu'(x^0)\int\ln|x-y|\,\chi_r(y)dy=u_1(x)+u_2(x).$$

Соответственно этому, разность $R_j(x,h)$ также разлагается на две части:

$$R_j(x,h)=R_j^{(1)}(x,h)+R_j^{(2)}(x,h).$$

Рассмотрим наиболее важный случай $j=0,$ а для $|j|>0$ доказательство оценки (1.1) проводится аналогично. Затем, оценка для $|j|=2$ сразу следует из условия 2).

Так как функция $\int \ln|x-y|\chi_r(y)dy$ бесконечно гладкая в замыкании единичного круга $\overline{B},$ а функция $\mu'(x)$ непрерывна на компакте $\overline{B}\setminus G_\varepsilon,$ то для функции

$$u_2(x)=\mu'(x^0)\int \ln|x-y|\chi_r(y)dy$$

имеет место оценка

$$\left|u_2(x+h)-\sum_{|\beta|\le n}\frac{u_2^{(\beta)}(x)}{\beta!}h^l\right|\le\omega_0(h)|h|^n,$$

где $\omega_0(h)\to 0$ при $h\to 0.$ Так как

$$\frac{\partial^{|\alpha|}u_2(x)}{\partial x^\alpha}=\mu'(x^0)\int\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\ln|x-y|\chi_r(y)dy$$

и

$$\frac{\partial^{|\alpha|}u_2(x)}{\partial x^\alpha}=\lim_{\delta\to 0}\mu'(x^0)\int\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{|x-y|^2+\delta^2}\,\chi_r(y)dy,$$

то

$$\left|R_0^{(2)}(x^0,h)\right|\le\omega_0(h)|h|^2,\quad x^0,\quad x^0+h\in\overline{B}\setminus G_\varepsilon. \tag{8}$$

При оценке $R_0^{(1)}(x^0,h)$ мы заметим, что согласно равенствах (2) и (3) производные $\dfrac{\partial^n u_1(x)}{\partial x^\alpha},\ |\alpha|=n,$ где

$$u_1(x)=\int \ln|x-y|d\nu_{x^0}(y),$$

в точке x^0 совпадают с сингулярным интегралом

$$\int\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha}\ln|x^0-y|d\nu_{x^0}(y)=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{|x^0-y|\ge\delta}\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha}\ln|x^0-y|d\nu_{x^0}(y).$$

Поэтому

$$R_0^{(1)}(x^0,h)=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\left[\ln|x^0-y+h|-\ln|x^0-y|\right]d\nu_{x^0}(y)-$$

$$\sum_{0<|\beta|<n}\frac{h^\beta}{\beta!}\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\ln|x^0-y|d\nu_{x^0}(y)-\sum_{|\beta|=n}\frac{h^\beta}{\beta!}\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\frac{\partial^n}{\partial x^\beta}\ln|x^0-y|d\nu_{x^0}(y)+$$

$$+\int\limits_{|x-y|\ge 2|h|}\left[\ln|x^0-y+h|-\ln|x^0-y|-\sum_{0<|\beta|\le n}\frac{h^\beta}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\ln|x^0-y|\right]d\nu_{x^0}(y)=$$

$$=I_1(x^0,h)-I_2(x^0,h)-I_3(x^0,h)+I_4(x^0,h).$$

Имеем

$$I_1(x^0,h)=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\left[\ln|x^0-y+h|-\ln|x^0-y|\right]d\nu_{x^0}(y)=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\frac{|x^0-y+h|}{|x^0-y|}d\nu_{x^0}(y)=$$

$$=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\frac{|x^0-y+h|}{|x^0-y|}d\nu^+_{x^0}(y)-\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\frac{|x^0-y+h|}{|x^0-y|}d\nu^-_{x^0}(y)=$$

$$=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\frac{|x^0-y+h|}{|x^0-y|}d\nu^+_{x^0}(y)+\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\frac{|x^0-y|}{|x^0-y+h|}d\nu^-_{x^0}(y)\le$$

$$\le\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\ln\left(1+\frac{|h|}{|x^0-y|}\right)d\nu^+_{x^0}(y)+\int\limits_{|x^0+h-y|<3|h|}\ln\left(1+\frac{|h|}{|x^0+h-y|}\right)d\nu^-_{x^0}(y).$$

Согласно лемме 2 последнее можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_0^{2|h|}\ln\left(1+\frac{|h|}{t}\right)d\nu^+_{x^0}\left(B(x^0,t)\right)+\int\limits_0^{3|h|}\ln\left(1+\frac{|h|}{t}\right)d\nu^-_{x^0}\left(B(x^0+h,t)\right)=$$

$$=\nu^+_{x^0}\left(B(x^0,2|h|)\right)\ln\frac{3}{2}+\int\limits_0^{2|h|}\frac{|h|}{t+|h|}\frac{\nu^+_{x^0}\left(B(x^0,t)\right)}{t}dt+\nu^-_{x^0}\left(B(x^0+h,3|h|)\right)\ln\frac{4}{3}+$$

$$+\int\limits_0^{3|h|}\frac{|h|}{t+|h|}\frac{\nu^-_{x^0}\left(B(x^0+h,t)\right)}{t}dt\le V\left(B(x^0,2|h|)\right)+\int\limits_0^{2|h|}\frac{V\left(B(x^0,t)\right)}{t}dt+V\left(B(x^0+h,3|h|)\right)+$$

$$+\left|\mu'(x^0+h)-\mu'(x^0)\right|\cdot m\left(B(x^0+h,3|h|)\right)+\int\limits_0^{3|h|}\frac{V\left(B(x^0+h,t)\right)}{t}dt+$$

$$+\left|\mu'(x^0+h)-\mu'(x^0)\right|\cdot\int\limits_0^{3|h|}\frac{m\left(B(x^0+h,t)\right)}{t}dt.$$

Последние неравенства получаются из того, что

$$d\nu^+_{x^0}(y)\le|d\nu_{x^0}(y)|,\quad d\nu^-_{x^0}(y)\le|d\nu_{x^0}(y)|$$

и

$$|d\nu_{x^0}(y)|\le|d\nu_{x^0+h}(y)|+\left|\mu'(x^0+h)-\mu'(x^0)\right|\chi_r(y)dy.$$

Так как $x^0, x^0+h\in\bar{B}\setminus G_\varepsilon$, то из условий 1) и 3) следует, что

$$I_1(x^0,t)\le\omega_1'(h)|h|^n, \qquad (9)$$

где $\omega_1'(h)\to 0$ при $h\to 0$. Точно таким образом можно показать, что

$$-I_1(x^0,t)\le\omega_1''(h)|h|^n, \qquad (10)$$

где $\omega_1''(h)\to 0$ при $h\to 0$. Объединяя неравенства (9) и (10) имеем

$$\left|I_1(x^0,t)\right| \le \omega_1(h)\left|h\right|^n, \tag{11}$$

где $\omega_1(h) = \max\left\{\omega_1'(h), \omega_1''(h)\right\}$.

Аналогично доказывается, что

$$\left|I_2(x^0,t)\right| \le \omega_2(h)\left|h\right|^n, \quad \omega_2(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{12}$$

Величина $I_3(x^0,t)$ оценивается с помощью условия 4):

$$\left|I_3(x^0,t)\right| \le \left|h\right|^n \sum_{|\beta|=n} \frac{1}{\beta!}\left|\int\limits_{|x^0-y|<2|h|} \frac{\partial^n}{\partial x^\beta}\ln\left|x^0-y\right| d\nu_{x^0}(y)\right| \le \omega_3(h)\left|h\right|^n, \tag{13}$$

$\omega_3(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Остаётся оценить $I_4(x^0,t)$. Мы воспользуемся неравенством для ядра:

$$\left|\ln\left|x-y+h\right| - \ln\left|x-y\right| - \sum_{0<|\beta|\le n} \frac{h^\beta}{\beta!}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\ln\left|x-y\right|\right| \le C\frac{\left|h\right|^{n+1}}{\left|x-y\right|^{n+1}}.$$

$x, y, h \in \mathbf{R}^n$, $\left|x-y\right| \ge 2\left|h\right|$, $C-$ константа. Доказательство этого неравенства не представляет труда. Его можно получить из формулы Тейлора. Имеем

$$\left|I_4(x^0,t)\right| \le C\left|h\right|^3 \int\limits_{|x^0-y|\ge 2|h|} \frac{\left|d\nu_{x^0}(y)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n+1}} \le C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{\infty}\frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n+1}}.$$

Теперь итегрируем по частям последного интеграла и используя условие 3) при достаточно малых $\left|h\right|$ мы имеем

$$C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{+\infty}\frac{dV\left(B\left(x^0,t\right)\right)}{t^{n+1}} \le (n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{+\infty}\frac{V\left(B\left(x^0,t\right)\right)}{t^{n+2}}dt =$$

$$= (n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{V\left(B\left(x^0,t\right)\right)}{t^{n+2}}dt + (n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2\sqrt{|h|}}^{1}\frac{V\left(B\left(x^0,t\right)\right)}{t^{n+2}}dt +$$

$$+(n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{2\sqrt{|h|}}\frac{V\left(B\left(x^0,t\right)\right)}{t^{n+2}}dt \le M\left|h\right|^{n+1} + (n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2\sqrt{|h|}}^{1}\frac{\gamma(t)}{t^2}dt +$$

$$+(n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{2\sqrt{|h|}}\frac{\gamma(t)}{t^2}dt = M\left|h\right|^{n+1} + (n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2\sqrt{|h|}}^{1}\frac{1}{t}d\gamma(t) +$$

$$+(n+1)C\left|h\right|^{n+1}\int\limits_{2|h|}^{2\sqrt{|h|}}\frac{1}{t}d\gamma(t) = M\left|h\right|^{n+1} + \left(\frac{n+1}{2}C\sqrt{|h|}\left(\gamma(1) - \gamma\left(2\sqrt{|h|}\right)\right)\right)\left|h\right|^n +$$

$$+\left(\frac{n+1}{2}C\left(\gamma\left(2\sqrt{|h|}\right) - \gamma\left(2|h|\right)\right)\right)\left|h\right|^n,$$

где $M = Sup\left\{V\left(B(x,2r)\right): x \in \overline{B} \setminus G_\varepsilon\right\}$. В итоге мы имеем

$$\left|I_4(x^0,t)\right| \le \omega_4(h)\left|h\right|^n, \quad \omega_4(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \qquad (14)$$

Наконец объединяя оценки (8), (11), (12), (13) и (14) мы получим оценку

$$\left|R_0(x,t)\right| \le \omega(h)\left|h\right|^n, \quad x, x+h \in \overline{B} \setminus G_\varepsilon, \text{ где } \omega(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Таким образом, $u(x)$ принадлежит классу $C^n\left(\overline{B} \setminus G\right)$. *Теорема доказана*

Литература

1. Cartan H. Theori du Potential newtonien: energie, capacite, suites de potentials. Bull. Soc. Math. France. 1945. V. 73. P. 74-106.
2. Landkof N.S. Foundation of modern potential theory (in Russian). Moskov,1966.
3. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. 7-е издание.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
4. Kishi M. Capacities of borelian sets and the continuity of potentials. Nagoya Mathematical Journal. 1957. V. 12. P. 195-219.
5. Stocke B.M. A Lusin type approximation of Bessel potentials and besov functions by smooth functions. Mathematica Scandinavica. 1995. V. 77. № 1. pp. 60-70.
6. Imomkulov S.A., Gadaev S.A. C^k-Properties of Subharmonic Functions. Lobachevskii J. Math. 2025, Vol. 46, № 2, pp.672-682. https:// doi.org/ 10.1134/S19950802256001675
7. Imomkulov S.A., Dauzhanov A.Sh. Differential properties of Riesz
8. potentials // Boundary value problems for differential equations. Zb.nauk.
9. Ave. Chernivtsi (Ukraine): Prut, 2005. – V, 12. – P. 120–128.
10. Verdera J. Capacitary differentiability of potentials of finite Radon measures, Ark. Mat., 57 (2019), 437–450.
11. Cuf´ı J. and Verdera J. Differentiability properties of Riesz potentials of finite measures and non-doubling Calder´on–Zygmund theory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (5) 18 (2018), 1081–1123.
12. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in
13. closed sets. // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V36. p.63-89.
14. Malgrange B. Ideals of differentiable functions. Oxford University Press, London. 1966.
15. Calderón A.P. and Zygmund A. On the existence of certain singular integrals, Acta Math. **88** (1952), 85-139.
16. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties functions.
17. Princeton University press, Prensiton, New Jersey, 1970.
18. Sadullaev A.S., Madrakhimov R.M. Smoothness of subharm onic functions. Math.sb. 1990. T.181. № 2. pp.167-182.