

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОГО СМЕШИВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ****Шаимов К.М.¹****Шодмонкулов М.Т.¹****Эшмуродов М.Х.¹****Ўбдимуҳталип Нўрлыбек Ўбдимуҳталипўлы²****shaimov.komiljon@samdaqu.edu.uz**

¹Самаркандский архитектурно-строительный университет, Самарканд, Узбекистан
140140, Узбекистан, г. Самарканд, ул. Лолазор, 70

²Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави,
Туркистан, Казахстан 161200, Улица Бекзата Саттарханова №29

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17612755>

Аннотация. Метод прямых модифицирован для решения линейного двухмерного уравнения параболического типа с разрывными граничными условиями в декартовых координатах. Приближенно-аналитический метод применим для задания начального и граничных условий в виде произвольных функций. Демонстрированы особенности процесса распространения тепловых волн в прямоугольной области, где большую температуру имеют одна или две стороны расчетной области. Показаны способы применения метода для решения двухмерных уравнений эллиптического и гиперболического типов.

Ключевые слова: теплопередача, задача Дирихле, метод прямых, собственные числа и векторы, тепловая волна, замена переменных, формулы перехода.

Annotatsiya. Dekart koordinatarida uzluksiz chegara shartlariga ega chiziqli ikki o'lchovli parabolik tenglamani yechish uchun to'g'ri chiziqlar usuli o'rganiladi.

Taxminiy analitik usul ixtiyoriy funksiyalar ko'rinishidagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarni o'rnatish uchun qo'llaniladi. To'g'ri to'rtburchak sohada termal to'lqinlarning tarqalish jarayonining xususiyatlari ko'rsatilgan, bu erda hisoblash maydonining bir yoki ikki tomoni yuqori haroratga ega. Elliptik va giperbolik tipdagi ikki o'lchovli tenglamalarni yechishda ushbu usulini qo'llash usullari ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Issiqlik uzatish, Dirixle masalasi, to'g'ri chiziqlar usuli, xos sonlar va vektorlar, Issiqlik to'lqinlari, o'zgaruvchilarni almashinishi, o'tish formulalari.

Annotation. The method of lines is modified to solve a linear two-dimensional parabolic equation with discontinuous boundary conditions in Cartesian coordinates.

The approximate analytical method is applicable for setting initial and boundary conditions in the form of arbitrary functions. The features of the process of propagation of thermal waves in a rectangular area are demonstrated, where one or two sides of the calculation region have a higher temperature. The methods of applying the method for solving two-dimensional equations of elliptic and hyperbolic types are shown.

Keywords: heat transfer, Dirichlet problem, method of lines, eigenvalues and eigenvectors, heat wave, change of variables, transition formulas.

1. Введение

Развитие численных методов решения многомерных задач обусловлено тем, что с одной стороны решаемые задачи выражены адекватными линейными и нелинейными

уравнениями и их краевыми условиями, а с другой стороны год за годом увеличиваются ресурсы вычислительной техники и технологий до привлечения кластеров и графических процессоров.

Для решения задач теплопередачи разработаны различные точные и приближенные методы [1-4]. В работе [5] приведены многочисленные аналитические решения задач теплопередачи в стационарной постановке в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. За последние годы интенсивно развиваются численные методы – метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Бубнова-Галеркина, метод Рвачева и другие применительно к параболическим или гиперболическим уравнениям теплопередачи [3].

Особый класс задач образуется при реализации метода конечных разностей, которые имеют единую трехдиагональную матрицу при переходе к конечно-разностным уравнениям для произвольного временного шага:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (1)$$

Такая матрица образуется при решении задач Дирихле относительно уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов, когда оператор лапласиана в уравнении имеет постоянный коэффициент при использовании метода прямых. Система конечно-разностных уравнений с такой основной матрицей решается многократным повторением в зависимости от реального (при решении параболических и гиперболических уравнений) или фиктивного (при решении эллиптического уравнения) времени.

Метод прямых формировался и развивался как способ перехода из многомерных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которых были разработаны различные методы. В частности, в работе [6] демонстрированы примеры использования метода прямых для треугольной области, области в виде сегмента и других. В области решения задачи проводятся равноудаленные прямые и вместе уравнения в частных производных образует система обыкновенных дифференциальных уравнений, количество которых равно количеству проведенных прямых.

Различные двух-и трехмерные задачи в декартовых, цилиндрических и сферических ортогональных координатах в работе [7] рассмотрены и решены методом прямых. Демонстрированы особенности решения многомерных задач методом прямых.

Сначала решается задача относительно первой координаты, для которой составляется матричное уравнение, определяются вспомогательные фундаментальная и диагональная матрица, осуществляется переход к линейной комбинации искомых функций, формируются соответствующие краевые условия и получается решение по данной координате. В следующем шаге процедура повторяется для второй координаты и т.д. Анализ результатов работы [7] показывает, что использование метода прямых при решении двумерной задачи по одной из координат, когда по второй координате

использован простой метод прогонки, также обеспечивает согласования результатов для фиксированного времени без введения промежуточных массивов искомой функции.

Аналогичное можно утверждать также для решения трехмерной задачи: применение метода прямых для двух координат и метода простой прогонки по третьей координате также обеспечивает согласования результатов расчета.

В работе [8] предложен новый усовершенствованный метод прямых, который позволяет понижение размерности многомерных задач строительной механики при совместном использовании с методом проекционный метод Бубнова-Галеркина-Петрова.

Метод применяется для расчета толстых пластин, пластин переменной толщины, неоднородных и многослойных пластин. Предлагаются конечно-разностные соотношения заменить проекционными, что расширит возможности метода прямых и позволит использовать метод в задачах динамики.

Работа [9] посвящена разработке модификации метода прямых для решения Кортевега-де Фриза.

В работе [10] метод прямых использован при решении уравнения диффузии дробного порядка производной, которые в настоящее время широко применяются при описании широкого класса физических и химических процессов, протекающих во фрактальных средах, при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов. Приведены результаты численного моделирования первой краевой задачи. Способ применения метода прямых в случае дробных производных приведен также в работах [11,12].

В работе [13] предложены варианты метода прямых для решения задач Робина, Неймана и периодических задач в одно-, двух- и трехмерных постановках.

Статья [14] предложена нелинейная модель мелкой воды для изучения распространения волн цунами в различных точках вдоль берега океана. При решении задач использован метод прямых. При моделировании учтены береговые склоны и глубина океана, высота и скорость набега волны цунами. Точность математической модели проверена путем решения классической тестовой задачи с известным аналитическим решением. Вычисленные высота наката и скорость удовлетворительно согласуются с физика волны цунами. Аналогичная задача рассмотрена в работе [15], где предлагается новый метод определения местоположения гибридных линий на основе бегущей волны разлома. Задача прогноза цунами на берегах Бангладеша решена в работе [16] с применением метода дифференциально-разностного метода.

Разработаны варианты метода прямых для смещенных граничных условий первого и третьего родов [17,18].

В целом, метод прямых широко используется во всех научных направлениях, где моделирование объекта приводит к уравнениям в частных производных, начиная от простых задач механики до задач многопроводных линиях передачи энергии, электромагнитных явлений, нелинейных уравнений Шрёдингера, ... и вплоть до социальных задач.

Применяемые при решении многомерных уравнений математической физики многочисленные способы расщепления, метод предиктор-корректор, метод переменных направлений и другие методы имеют общий недостаток – необходимо согласовать результаты факторизации (прогонки) по разным направлениям (факторам).

В связи с этим при изучении распространения тепловых волн в прямоугольнике обратимся к методу прямых – представителю дифференциально-разностных методов [19-20], который лишен от этого недостатка.

2. Постановка задачи

Применение обобщенной функции ζ в задачах теплопередачи [5] позволяет получить и качественные, и количественные результаты. При изложении материала параграфа в качестве такой функции использована относительно-избыточная температура ζ , а координаты приведены к безразмерному виду с привлечением длины участка l_x . В связи с этим прямоугольник с размерами (l_x, l_y) в расчетах принимается с размерами $(1, l)$ (в нашем случае $l = 1$).

Рассмотрим следующую задачу, где коэффициент теплопроводности, плотность и приведенная теплоемкость тела имеют постоянные значения.

Прямоугольное тело имеет размеры l_x, l_y . Начальное значение относительно-избыточной температуры (в дальнейшем сокращенно температуры) – нулевое. Процесс начинается с того, что в одной или двух сторон прямоугольника устанавливается температура 1. Остальные стороны прямоугольника имеют нулевое значение. При такой постановке уравнение теплопередачи имеет вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + f'(x, y, t),$$

где $\zeta(x, y, t)$ – относительно-избыточная температура; $f'(x, y, t)$ – приведенная по плотности и удельной теплоемкости материала мощность источника тепла в массе, которая может быть непрерывной или разрывной функцией; t – произведение коэффициента температуропроводности на реальное время, имеет размерность m^2 .

Координаты x и y обезразмерены относительно длины l_x , а начальным условием задачи служит:

$$\zeta(x, y, 0) = \zeta^0(x, y),$$

а граничными условиями –

$$\begin{aligned} \zeta(0, y, t) &= \mu_{x0}(y), \quad \zeta(1, y, t) = \mu_{xl}(y), \\ \zeta(x, 0, t) &= \mu_{y0}(x), \quad \zeta(x, l, t) = \mu_{yl}(x). \end{aligned}$$

Начальное и граничные условия могут быть и ненулевыми. Но нас интересуют тепловые волны, которые характеризуются высокими тепловыми напряжениями на теле, многократное повторение которых может привести к разрушению целостности объекта.

Требуется разработать алгоритм решения задачи методом прямых.

3. Метод решения

Вводится равномерная сетка по координатам и времени с шагами h_x, h_y, τ и индексами $i = 0..N_x + 1, j = 0..N_y + 1, n = 0..N_t$.

Аппроксимируя уравнение по координате x и соответствующие граничные условия, составляется матричное уравнение

$$\frac{\partial Z_j}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} A_j^{(x)} Z_j + \frac{\partial^2 Z_j}{\partial y^2} + F_j, \quad (2)$$

где

$$Z_j = (\zeta_{1,j}^{n+1}, \zeta_{2,j}^{n+1}, \dots, \zeta_{N_x-1,j}^{n+1}, \zeta_{N_x,j}^{n+1})^T,$$

$$F_j = \left(f_{1,j}' + \frac{\mu_{0,j}^{n+1}}{h_x^2}, f_{2,j}', \dots, f_{N_x-1,j}', f_{N_x,j}' + \frac{\mu_{N_x+1,j}^{n+1}}{h_x^2} \right)^T = (f_{1,j}, f_{2,j}, \dots, f_{N_x-1,j}, f_{N_x,j})^T.$$

Здесь $(.)^T$ – операция транспонирования матрицы, т. е. Z_j и F_j являются вектор-столбцами. Матрица $A_j^{(x)}$ имеет структуру (1) и размерность N_x . В связи с этим только член с $A_j^{(x)}Z_j$ представляет матрицу, а остальные члены уравнения (2) являются вектор-столбцами.

Аппроксимируя производные, при фиксированных значениях j можно задачу решить методом прогонки. Но при этом значения членов $\frac{\partial Z_j}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 Z_j}{\partial y^2}$ и F_j берутся из предыдущего временного шага (полушага). Соответственно, процесс придется повторить для второй координаты. В результате образуется классический метод факторизации, в котором результаты первого и второго полушагов будут разные. В связи с этим при решении эллиптического уравнения организуется итерационный процесс, чтобы согласовать результаты первого и второго полушагов. Метод прямых позволяет исключить ошибки решения связанной введением искомого в промежуточном полушаге.

Для этого необходимо выделить отдельные уравнения из системы (2).

Для выделения отдельных уравнений из этого матричного уравнения, умножим (2) слева на матрицу B_x^{-1} , которая представляет обратной матрицы фундаментальной матрицы B_x с элементами $b_{s,p}^{(x)} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x+1}} \sin \frac{\pi s p}{N_x+1}$, являющиеся элементами собственных векторов матрицы $A_j^{(x)}$. С учетом $A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1}$, где Λ_x представляет диагональную матрицу с элементами $\lambda_s^{(x)} = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{N_x+1} \right)$ собственных значений матрицы $A_j^{(x)}$ [21]. Тогда матричное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_j}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} \Lambda_x \tilde{Z}_j + \frac{\partial^2 \tilde{Z}_j}{\partial y^2} + \tilde{F}_j,$$

где

$$\tilde{Z}_j = B_x^{-1} Z_j = B_x Z_j = (\tilde{\zeta}_{1,j}^{n+1}, \tilde{\zeta}_{2,j}^{n+1}, \dots, \tilde{\zeta}_{N_x-1,j}^{n+1}, \tilde{\zeta}_{N_x,j}^{n+1})^T,$$

$$\tilde{F}_j = B_x^{-1} F_j = B_x F_j = (\tilde{f}_{1,j}^{n+1}, \tilde{f}_{2,j}^{n+1}, \dots, \tilde{f}_{N_x-1,j}^{n+1}, \tilde{f}_{N_x,j}^{n+1})^T.$$

Из последнего матричного уравнения выделяется уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_{i,j}}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\zeta}_{i,j} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_{i,j}}{\partial y^2} + \tilde{f}_{i,j}^{n+1}.$$

Преобразованными граничными условиями данных уравнений служат

$$\tilde{\mu}_{i,0} = \tilde{\zeta}_{i,0} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \mu_{p,0}^{n+1}, \quad \tilde{\mu}_{i,N_y+1} = \tilde{\zeta}_{i,N_y+1} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \mu_{p,N_y+1}^{n+1}.$$

Аналогично преобразуются начальные условия для уравнений $\tilde{\zeta}_{i,j}$.

Повторным применением описанной выше процедуру метода прямых с помощью матриц B_y и Λ_y приходим к отдельным уравнениям

$$\frac{\partial \check{\zeta}_{i,j}}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \check{\zeta}_{i,j} + \frac{1}{h_y^2} \lambda_j^{(y)} \check{\zeta}_{i,j} + \check{f}_{i,j}.$$

Отсюда, используя схему назад по времени, переходим к дискретному представлению производной по времени и находим значения вновь введенных функций

$$\check{\zeta}_{i,j}^{n+1} = \frac{\check{\zeta}_{i,j}^n + \tau_n \check{f}_{i,j}^{n+1}}{1 - \tau_n \left(\frac{\lambda_i^{(x)}}{h_x^2} + \frac{\lambda_j^{(y)}}{h_y^2} \right)}. \quad (3)$$

Формирование начального условия для вновь введенной функции осуществляется по формуле

$$\check{\zeta}_{i,j}^0 = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)} \zeta_{p,q}^0,$$

а обратный переход к относительно-избыточной температуре – по формуле

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)} \check{\zeta}_{p,q}^{n+1}.$$

Таким образом, используя положений метода прямых, исключили невязку, которая образуется при использовании методов факторизации и прогонки.

4. Результаты и обсуждение

По представленному материалу была составлена программа и проведен вычислительный эксперимент.

Отметим, что точность аппроксимации составляет $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)\tau = 0.01$. В нашем случае безразмерные шаги имели значения $\tau = 0.01$, $h_x = h_y = 0.05$. Точность аппроксимации можно увеличить, например, используя, например, неявную по времени схему или уменьшив шаги численного интегрирования. Но основным успехом этого метода, как уже отметили, является точное, в рамках машинных округлений, решение конечноразностных уравнений.

Остановимся на некоторые результаты вычислительного эксперимента.

В качестве задача 1 рассмотрим случай с краевыми условиями

$$\zeta^0(x, y) = 0, \quad \mu_{x0}(y) = 0, \quad \mu_{xl}(y) = 0, \quad \mu_{y0}(x) = 0, \quad \mu_{yl}(x) = 1.$$

Т.е. начиная от $t = 0$ на границе $y = 1$ устанавливается температура 1. Начальная температура и на остальных границах температура нулевая.

На рис. 1 приведены изотермы, полученные при $t = 50 (m^2)$. Нулевые граничные условия на боковых стенках постепенно сужают фронта тепловой волны, образуя своеобразные «языки» высокой температуры.

Данный фактор более ярко выражается при распространении встречных волн, когда $\mu_{y0}(x) = 1$, $\mu_{yl}(x) = 1$. На рис. 2 приведены изотермы, полученные для этого случая при $t = 140 (m^2)$.

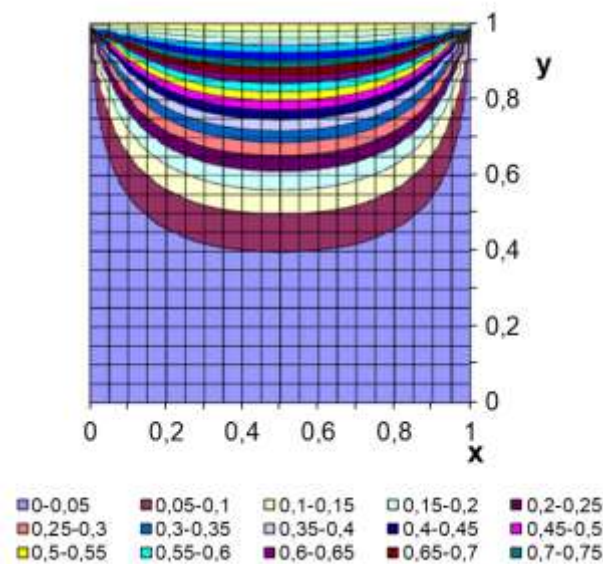


Рис. 1. Изотермы в квадратичной области для случая распространения тепловой волны из верхней границы расчетной области при $t = 50 \text{ (} m^2 \text{)}$

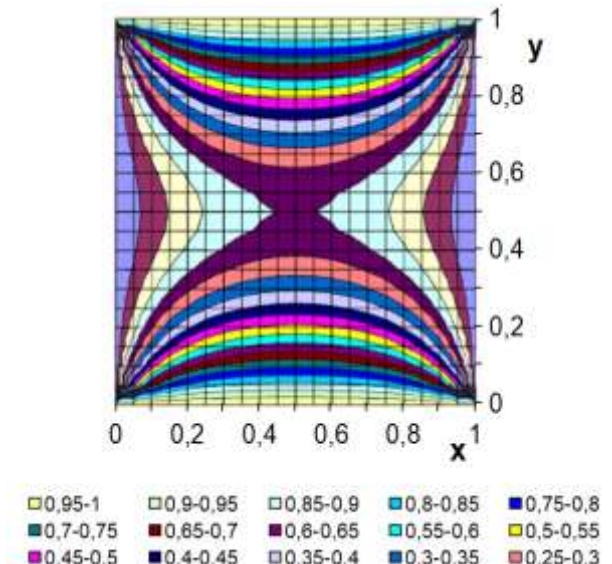


Рис. 2. Изотермы в квадратичной области для случая распространения тепловой волны из верхней и нижней границ расчетной области при $t = 140 \text{ (} m^2 \text{)}$

Аналогичные расчеты проводились для случаев, когда граничные значения температуры 1 относились границам $x = 0$ и $y = 1$, и когда на границах $y = 0$ температура имеет значение 1, а в остальных сторонах квадрата – нулевое значение. Представление результатов расчета в виде изотерм в расчетной области позволяет выделить зон высокого температурного напряжения. Они характеризуются сгущением изотерм. Таковыми являются точки границы области расчета, где происходит скачкообразный переход к другому значению температуры.

Эти результаты представляют динамику тепловой волны в области формы квадрата. В литературе по теории теплопередачи зачастую рассматриваются и решаются задачи в стационарной постановке при $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \rightarrow 0$. Т.е. решается эллиптическое уравнение при независимых от времени граничных условиях. Численное решение таких задач производится с введением фиктивного времени, который известен как метод установления решения. С этой точки зрения в рамках условия точности

$$\max_{i,j} |\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n| < 0.001$$

решение эллиптического уравнения получается при $n = 1400$ шагов по времени при распространении тепла только с одной стороны.

Для решения эллиптического уравнения для квадратичной области также составлены алгоритм и программа расчета, где формула (3) принимается в виде

$$\tilde{\xi}_{i,j} = -\frac{\tilde{f}_{i,j}^{n+1}}{\lambda_i^{(x)} / h_x^2 + \lambda_j^{(y)} / h_y^2}, \text{ а алгоритм с соответствующими поправками. Результаты,}$$

которые получены при граничном значении температуры 1 для $x = 0$ и $y = 1$ и когда на границах $y = 0$ температура имеет значение 1, а в остальных сторонах квадрата – нулевое значение, приведены на следующих двух рисунках в форме изолиний.

Заметим, что в отличие от известных методов в данном случае приведенный алгоритм использован только один раз.

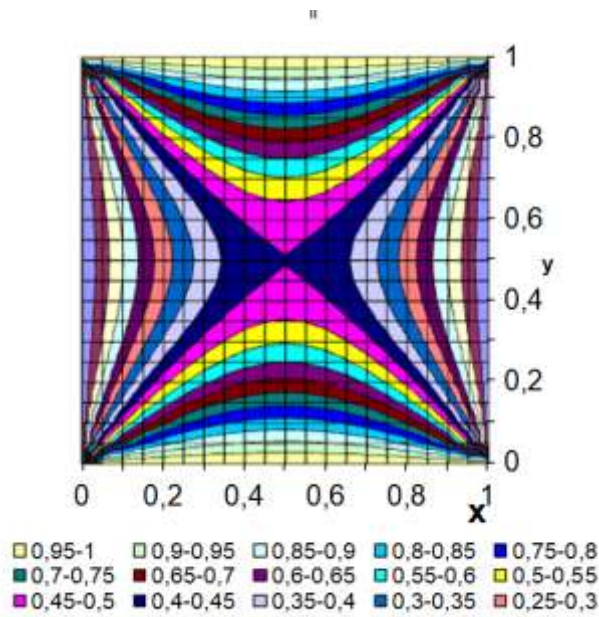


Рис. 3. Изотермы для случая распространения встречных тепловых волн, полученные при решении эллиптического уравнения методом прямых

5. Заключение

На основе метода прямых разработаны алгоритмы решения параболических и эллиптических уравнений теплопроводности для области в виде единичного квадрата.

Точность аппроксимации метода составляет $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. Алгоритм можно применять также для решения уравнения гиперболического типа – для этого случая

формула (3) принимается в виде
$$\tilde{\zeta}_{i,j}^{n+1} = \frac{2\tilde{\zeta}_{i,j}^n - \tilde{\zeta}_{i,j}^{n-1} + \tau_n \tilde{f}_{i,j}^{n+1}}{1 - \tau_n (\lambda_i^{(x)} / h_x^2 + \lambda_j^{(y)} / h_y^2)}$$
 и проводятся

соответствующие видоизменения последующих формул.

Алгоритм использовали для изучения особенностей динамики распространения одно- и двусторонних тепловых волн в области единичного квадрата. Выявлено, что в рассмотренных задачах большие градиенты температуры ожидаются в точках границы области, где происходит разрыв температуры.

Доказано, что применение метода прямых при решении эллиптического уравнения позволяет многократно сокращает объем вычислений, так как не привлекается метод итераций. Это полезно, в частности, для решения задач гидродинамики в представлении вихрь-функция тока.

Литература

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – С. 728 (1-й том 392 с.).

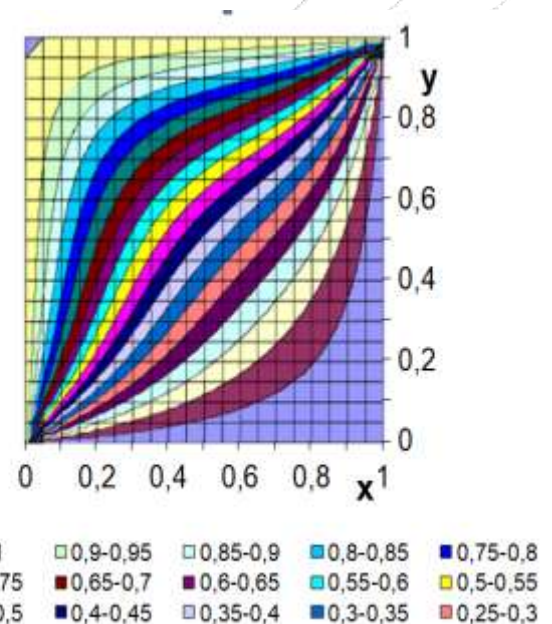


Рис. 4. Изотермы для случая распространения тепловых волн из левой и верхней границ при решении эллиптического уравнения методом прямых

2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена // М.: Наука, 1984. – 288 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
5. Исаев С.И., Кожин И.А. и др. Теория тепломассообмена. Под ред. А.И.Леонтьева, М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.
6. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103.
7. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
8. Станкевич А.Н. Модифицированный метод прямых // Вестник МГСУ, 2016. №. 8, – С. 34-47.
9. W.E. Schiesser Method of Lines Solution of the Korteweg-de Vries Equation // Computers Math. Applic. Vol. 28, No. 1&12, pp. 147-154, 1994, Elsevier Science Ltd
10. Геккиева С.Х., Керёфов Б.М. Метод прямых решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Вестник КРАУНЦ, 2016. №. 4-1(16) – С. 27-31.
11. Younes Salehi, Mohammad T. Darvishi, William E. Schiesser. Numerical solution of space fractional diffusion equation by the method of lines and splines // Applied Mathematics and Computation, 2018. No. 336. – P. 465-480. doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.053
12. P.Saucez, A.Vande Wouwer; W.E. Schiesser, P.Zegeling Method of lines study of nonlinear dispersive waves // Journal of Computational and Applied Mathematics 168 (2004) 413–423, Elsevier Science Ltd
13. Saeed Kazem, Mehdi Dehghan Application of finite difference method of lines on the heat equation // Numerical Methods for Partial Differential Equations Volume 34, Issue 2 March 2018, Pages 626-660. Wiley Online Library, <https://doi.org/10.1002/num.22218>
14. Mohamed M.Mousa. Efficient numerical scheme based on the method of lines for the shallow water equations // Journal of Ocean Engineering and Science, 2018. № 3, – P. 303-309.
15. Liwei Xie, Longfu Luo, Junjie Ma, Yong Li, Mingmin Zhang, Xiangjun Zeng, Yijia Cao. A novel fault location method for hybrid lines based on traveling wave // International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 2022. No. 141. doi.org/10.1016/j.ijepes.2022.108102
16. Md Emran Ali, Gour Chandra Paul. An estimation of water levels associated with a storm along the coast of Bangladesh using a non-central difference method of lines // Ocean Engineering, 2022. No. 248. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110776
17. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Аналитическое решение задачи о собственных значениях и векторах матрицы перехода из параболического уравнения к конечноразностным уравнениям при решении задачи Дирихле // Узбекский журнал: Проблемы информатики и энергетики, 2017, №2. – С. 12-19.
18. Каримов И.К., Хужаев И.К., Хужаев Ж.И. Применение метода прямых при решении одномерного уравнения параболического типа при граничных условиях второго и первого родов // Вестник КРАУНЦ, 2018, 1 (21). – С. 78-93.