IMPULS TÁSRINE IYE SÍZÍQLÍ BIRTEKLI DIFFERENCIALLÍQ TEŃLEMELER SISTEMASÍ USHÍN ÚSH TOCHKALÍ SHEGARALÍQ MÁSELELERDI SHESHIWDÍŃ IZBE IZ JUWÍQLASIWLAR USÍLÍ

Qurbanbaev Ó.O.

Berdaq atındağı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, docent.

Askarova D.B

Berdaq atındağı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, stajyor oqıtıwshı**.**

Saliev I.B

Berdaq atındağı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, assistant.

https://doi.org/10.5281/zenodo.13746428

Annotaciya. *Maqalada impulslıq tásirge iye sızıqlı birtekli differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh tochkalı shegaralıq máseleler qarastırılıp, sheshimdi A.M.Samoylenkonıń sanlı analitikalıq usılı járdeminde juwıq tabıw máselesi qarastırıladı.*

Gilt sózler: *Sızıqlı differenciallıq teńlemeler sisteması, úsh tochkalı shegaralıq másele, impulslıq tásir, juwıq sheshim, dál sheshim.*

A SEQUENTIAL APPROXIMATION METHOD FOR SOLVING THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SYSTEM OF LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE EFFECTS

Abstract . *In the article, three-point boundary value problems for a system of linear homogeneous differential equations with impulse effect are considered, the problem of finding the solution using the numerical analytical method of A.M. Samoilenka is considered.*

Key words: *System of linear differential equations, three-point boundary value problem, impulse effect, approximate solution, exact solution.*

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Аннотация. *В статье рассмотрены трехточечные краевые задачи для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, рассмотрена задача поиска решения численно-аналитическим методом А.М. Самойленки.*

Ключевые слова: *Система линейных дифференциальных уравнений, трехточечная краевая задача, импульсный эффект, приближенное решение, точное решение.*

Teoriyalıq fizikanıń, kvantlıq elektronikanıń, mexanikanıń, elektronlı texnikanıń hám ilimniń basqada tarawlarınıń kóplegen máselelerinde impulslıq tásirge iye ádettegi differenciallıq teńlemeler sisteması ushın shegaralıq máselelerdi úyreniw zárúrligi payda bolıp, bul teoriya boyınsha kóplegen jumıslar islenbekte. Impulslıq tásirge iye differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarǵı mashqalaların izertlewge A.M.Samoylenkonıń hám taǵı basqa ullı matematiklerdiń ilimiy jumısları baǵıshlanǵan [1,2].

Bul maqalada impulslıq tásirge iye birinshi tártipli ádettegi sızıqlı birtekli differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh tochkalı shegaralıq máseleler qarastırılıp, onda sheshimdi juwıq dúziw hám qátelikti bahalaw máseleleri bayan etiledi.

Meyli impulslıq tàsirge iye

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x,\quad t\neq\tau_i,\quad i=1,2,...,N, \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=x(\tau_i+0)-x(\tau_i-0)=d_i \tag{2}$$

differenciallıq teńlemeler sistemasınıń úsh tochkalı

$$Ax(0)+Bx(t_1)+Cx(T)=d \tag{3}$$

shegaralıq shàrtti qanaatlandıratuǵın sheshimin juwıq tabıw màselesin qarastırayıq, bul jerde x hám $d, d_i,\ i=1,2,...,N$ ler E_n Evklid keńisliginiń tochkaları, $P(t)$ bolsa $[0,T]$ aralıǵında ùziliksiz bolǵan n òlshemli kvadrat matrica, A, B hám C lar turaqlı n òlshemli kvadrat matricalar, sonıń menen birge $\det(A+B+C)\neq 0$ hàm $\tau_i\in(0,T)$ bolıp, bul tochkalar $x(0)$ hám $x(T)$ lar menen birlikte bir-birinen teńdey qashıqlıqta jaylasqan tochkalar, yaǵnıy $\tau_{i+1}-\tau_i=h=const.$

Meyli $P(t)$ matricası ushın

$$P=\max_{t\in[0,T]}|P(t)| \tag{4}$$

bolsın hàm $Q=\frac{T}{\pi}P$ matricasınıń menshikli mànisleri absolyut shaması boyınsha birden kishi bolsın, yaǵnıy

$$|\lambda(Q)|<1. \tag{5}$$

Bul uyǵarıwlar orınlı bolǵan jaǵdayda (2) impulslıq hàm (3) shegaralıq shàrtlerdi qanaatlandıratuǵın (1)-(3) impulslıq tàsirge iye úsh tochkalı shegaralıq màseleniń dàl sheshimine teń òlshemli umtılatuǵın $x_m(t,x_0)$ funkciyalar izbe-izligin dùziwge boladı.

Meyli Dirak hám Xevisayda funkciyaları arasındaǵı $\chi(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(s)ds$ integrallıq baylanıstı paydalana otırıp (1),(2) impulslıq tàsirge iye sistemanı

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+\sum_{i}d_i\delta(t-\tau_i) \tag{6}$$

túrinde jazayıq hám

$$x_{m+1}(t,x_0,x_T)=x_0(t,x_0,x_T)+\int_0^t\Big[P(s)x_m(s,x_0,x_T)- \tag{7}$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T P(s)x_m(s,x_0,x_T)ds\Big]ds+\sum_{\tau_i<t}d_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^{N}d_i,\ m=0,1,2,\ldots$$

funkciyalar izbe-izligin qarastırayıq, bul jerde $x_0=x(0),\ x_T=x(T)$ hám sonıń menen birge $x_0(t,x_0,x_T)=\left(1-\frac{t}{T}\right)x_0+\frac{t}{T}x_T.$

Endi (7) formula jàrdeminde anıqlanatuǵın $x_m(t,x_0,x_T)$ funkciyalar izbe-izligininń jıynaqlı izbe-izlik ekenligin kòrseteyik. Onıń ushın dàslepki juwıqlasıw retinde $x_0(t,x_0,x_T)=\left(1-\frac{t}{T}\right)x_0+\frac{t}{T}x_T$ dı qabıl ete otırıp, Koshidiń jıynaqlılıq belgisi boyınsha qàlegen $j\geq 1$ ushın $\left|x_{m+j}(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0,x_T)\right|$ ayırmasın bahalaymız. Usı maqsette (4) ni esapqa ala otırıp, (7) den kelip shıǵatuǵın hàm qàlegen $t\in[0,T]$ ushın orınlı bolatuǵın

$$\left|x_{m+1}(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0,x_T)\right|\leq P\Bigg[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\big|x_m(t,x_0,x_T)- \tag{8}$$

$$-x_{m-1}(s,x_0,x_T)\big|ds+\frac{t}{T}\int_t^T\left|x_m(s,x_0,x_T)-x_{m-1}(s,x_0,x_T)\right|ds\Bigg]$$

teńsizligin paydalanamız. Eger

$$r_m(t)=\left|x_m(t,x_0,x_T)-x_{m-1}(t,x_0,x_T)\right|$$

belgilewin jasasaq, (8) ni

$$r_{m+1}(t)\leq P\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^T r_m(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(s)ds\right] \tag{9}$$

dep jazıwǵa boladı.

Dàslep $r_1(t)$ nı (7) den $m=0$ ushın tòmendegishe bahalap òtemiz:

$$\left|x_1(t,x_0,x_T))-x_0(t,x_0,x_T)\right|\le\left|\int_0^t\left[P(s)x_0(t,x_0,x_T)-\frac{1}{T}\int_0^T P(s)x_0(t,x_0,x_T)ds\right]ds+\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{\tau_i<t}d_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^{N}d_i\right|\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left|P(s)x_0(t,x_0,x_T)\right|ds+\right.$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T\left|P(s)x_0(t,x_0,x_T)\right|ds+\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t}\left|d_i\right|+\frac{t}{T}\sum_{\tau_i<t}\left|d_i\right|\le$$

$$\le P\left|x_0(t,x_0,x_T)\right|\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t ds+\frac{t}{T}\int_t^T ds\right]+D\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{r_i<t}1+\frac{t}{T}\sum_{r_i>t}1\right]\le$$

$$\le Px_{0T}\alpha_1(t)+D\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{N+1}{T}\cdot t+\frac{t}{T}\cdot\frac{N+1}{T}(T-t)\right]\le$$

$$\le Px_{0T}\alpha_1(t)+\frac{1}{N}D\alpha_1(t)=\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_1(t),$$

yaǵnıy

$$r_1(t)\le\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_1(t),$$

bul jerde $x_{0T}=\max(|x_0|,|x_T|)$ hám $D=\max_i|d_i|$. Endi $m=1$ ushın (9) dan

$$r_2(t)\le P\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_1(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T r_1(s)ds\right]\le$$

$$\le P\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left(\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_1(s)\right)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_1(s)ds\right]\le$$

$$\le P\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_2(t)$$

teńsizligine iye bolamız.

Usınday (9) dan $m=2$ ushın

$$r_3(t) \le P\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_2(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T r_2(s)ds\right] \le$$

$$\le P\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t P\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_2(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T P\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_2(s)ds\right\} =$$

$$= P^2\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_3(t)$$

teńsizligine iye bolamız.

Matematikalıq indukciya metodı boyınsha $t \in [0,T]$ hàm qálegen m ler ushın

$$r_{m+1}(t) \le P^m\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\alpha_{m+1}(t) \tag{10}$$

teńsizligi orınlı boladı. Eger $\alpha_{m+1}(t) \le \frac{T^m}{\pi^m}\tilde{\alpha}(t)$ ekenligin esapqa alsaq, bul jerde

$\tilde{\alpha}(t) = \frac{\pi}{3}\alpha_1(t),$ onda (10) nı

$$r_{m+1}(t) \le P^m\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\frac{T^m}{\pi^m}\tilde{\alpha}(t) =$$

$$= P^m\frac{T^m}{\pi^m}\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\tilde{\alpha}(t) = Q^m\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\tilde{\alpha}(t)$$

dep jazıwǵa boladı. Sońǵı teńsizlikti esapqa alsaq, onda

$$\left|x_{m+j}(t,x_0,x_T) - x_m(t,x_0,x_T)\right| \le \sum_{i=1}^{j}\left|x_{m+i}(t,x_0,x_T) - x_{m+i-1}(t,x_0,x_T)\right| = \tag{11}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\tilde{\alpha}(t) = Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D\right)\tilde{\alpha}(t)$$

teńsizligi orınlı boladı. Al

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i \le \sum_{i=0}^{\infty}Q^i = (E-Q)^{-1}$$

hàm

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0$$

bolǵanlıqtan (11) den $m \to \infty$ daǵı shekke òtip $x_m(t, x_0, x_T)$ funkciyalar izbe-izligınıń teń òlshemli jıynaqlı izbe-izlik bolatuǵınlıǵın kòriwge boladı

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0, x_T) = x^*(t, x_0, x_T). \tag{12}$$

$x_m(t, x_0, x_T)$ funkciyası menen onıń $m \to \infty$ daǵı shegi $x^*(t, x_0, x_T)$ funkciyası arasındaǵı ayırma ushın

$$\left|x^*(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)\right| \le Q^m (E - Q)^{-1}\left(Px_{0T} + \frac{1}{N}D\right)\tilde{\alpha}(t) \quad m = 1, 2, \dots \tag{13}$$

Eger (7) den $m \to \infty$ daǵı shek alsaq hàm (12) ni esapqa alsaq, onda $x^*(t, x_0, x_T)$ funkciyasınıń tòmendegi

$$x(t, x_0, x_T) = x_0(s, x_0, x_T) + \int_0^t \left[P(s)x(s, x_0, x_T) - \frac{1}{T}\int_0^T P(s)x(s, x_0, x_T)ds \right] ds +$$

$$+\sum_{\tau_i < t} d_i - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{N} d_i, \; m = 0, 1, \dots$$

integrallıq teńlemesiniń sheshimi bolatuǵınının kòriwge boladı.

Al (6) kòriniske iye impulslıq tàsirge iye differenciallıq teńlemeler sisteması

$$x(t) = x_0 + \int_0^t P(s)x(s)ds + \sum_{\tau_i < t} d_i$$

integrallıq teńlemege ekvivalent bolǵanlıqtan, (6) impulslıq tàsirge iye sistemanı sheshiw ushın x_0 hám x_T parametrlerin

$$\Delta(x_0, x_T) = x_T - x_0 - \int_0^T P(s)x^*(s, x_0, x_T)ds - \sum_{i=1}^{N} d_i$$

hám

$$\varphi(x_0, x_T) = Ax_0 + Cx_T - \psi(x^*(t, x_0, x_T))$$

vector funkciyaların nolge aylanatuǵınday etip saylap alıw kerek boladı, yaǵnıy x_0 hám x_T parametrleriniń mánisi

$$\begin{cases} \Delta(x_0, x_T) = 0, \\ \varphi(x_0, x_T) = 0 \end{cases}$$

sistemasın sheshiw arqalı anıqlanadı, bul jerde

$$\psi(x^*(t,x_0,x_T))=(A+B+C)^{-1}\left[(A+C)d-BA\int_0^{t_1}P(s)x^*(s,x_0,x_T)\,ds+\right.$$

$$\left.+BC\int_{t_1}^{T}P(s)x^*(s,x_0,x_T)ds\right].$$

Bul alınǵan nàtiyjelerdi juwmaqlastırıp, tòmendegi teorema tùrinde beriwge boladı.

Teorema. Meyli $P(t)$ matricası $[0,T]$ aralıǵında ùziliksiz hàm sonıń menen birge (5) shàrt orınlı bolsın. Egerde dàslepki juwıqlasıwdı $x_0(t,x_0,x_T)=\left(1-\frac{t}{T}\right)x_0+\frac{t}{T}x_T$ dep alıp, ondaǵı x_0 hám x_T parametrlerin $\Delta(x_0,x_T)$ hám $\varphi(x_0,x_T)$ vektor funkciyaları nòlge aylanatuǵınday etip saylap alsaq, onda (7) funkciyalar izbe-izliginiń $m\to\infty$ daǵı shegi, yaǵnıy $x^*(t,x_0,x_T)$ funkciyası (6)

impulslıq tàsirge iye sızıqlı birtekli sistemanıń sheshimi bolıp tabıladı.

Dàl $x^*(t,x_0,x_T)$ sheshim menen juwıq $x_m(t,x_0,x_T)$ sheshim arasındaǵı ayırma (13) teńsizlik penen bahalanadı.

Egerde $x_m(t,x_0,x_T)$ juwıqlasıwdı tabıw menen shegaralanatuǵın bolsaq, onda x_0 hám x_T parametrlerin

$$\begin{cases}\Delta_m(x_0,x_T)=0,\\ \varphi_m(x_0,x_T)=0\end{cases}$$

sistemasınıń sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alıwǵa alıwǵa tuwra keledi, bul jerde

$$\Delta_m(x_0,x_T)=x_T-x_0-\int_0^T P(s)x_{m-1}(s,x_0,x_T)ds-\sum_{i=1}^{N}d_i,$$

$$\varphi_m(x_0,x_T)=Ax_0+Cx_T-\psi(x_{m-1}(t,x_0,x_T)).$$

REFERENCES

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –Киев. “Вища школа”, 1987.
2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. –Киев.
3. “Наукова думка”, 1992. стр.280.