

BUTUN SONLAR GEOMETRIYASI. PELL TENGLAMALARIGA VIZUAL NIGOH

¹Raximov Nasriddin NomozovichSamarqand davlat pedagogika instituti
Matematika kafedrası mudiri, dotsent.nasriddin.raximov@inbox.ru²Botirov Muzaffar MaxmudxonovichSamarqand davlat pedagogika instituti
Akademik litseyi bosh o'qituvchisi.botirovmuzaf87@gmail.com³Boyqobilov Erali Bahromjon o'g'liSamarqand davlat pedagogika instituti
Akademik litseyi o'qituvchisi.eraliboyqobilov@gmail.com<https://doi.org/10.5281/zenodo.18062187>

Annotatsiya. Ushbu maqolada Diofant tenglamalari **butun sonlar geometriyasi** nuqtayi nazaridan tahlil qilinadi va ularni o'rganishda **vizual yondashuvning** ilmiy hamda pedagogik ahamiyati yoritiladi. An'anaviy algebraik usullar Diofant tenglamalarining mavjudligi va yechimlar tuzilishini aniqlashda samarali bo'lsa-da, ko'plab hollarda yechimlarning ichki tuzilishini intuitiv anglash imkonini cheklaydi. Xususan, **Pell tenglamasi** vizual yondashuvlar asosida tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: Diofant tenglamalari, butun sonlar geometriyasi, vizual yondashuv, Pell tenglamasi, butun sonli yechimlar, Geron uchburchaklari, Beshburchakli sonlar, panjara nuqtalari.

INTEGER GEOMETRY. A VISUAL PERSPECTIVE ON PELL EQUATIONS

Annotation. This article analyzes Diophantine equations from the perspective of **integer geometry** and highlights the **scientific and pedagogical significance** of a visual approach in studying them. While traditional algebraic methods are effective in determining the existence of solutions and their structure, in many cases they limit the ability to intuitively understand the internal structure of the solutions. In particular, the **Pell equation** is analyzed using visual approaches.

Keywords: Diophantine equations, integer geometry, visual approach, Pell equation, integer solutions, Heron triangles, pentagonal numbers, lattice points.

Аннотация. В данной статье диофантовы уравнения анализируются с точки зрения геометрии целых чисел и освещается **научное и педагогическое значение** визуального подхода при их изучении. Хотя традиционные алгебраические методы эффективны для определения существования решений и их структуры, во многих случаях они ограничивают возможность интуитивного понимания внутренней структуры решений. В частности, **уравнение Пелля** анализируется с использованием визуальных подходов.

Ключевые слова: Диофантовы уравнения, геометрия целых чисел, визуальный подход, уравнение Пелля, целочисленные решения, треугольники Герона, пятиугольные числа, точки решётки.

Introduction

Kvadratik Diofant tenglamalari orasida eng ko'p o'rganiladiganlaridan biri bu **Pell tenglamalari** deb ataluvchi $x^2 - dy^2 = c$ ko'rinishdagi tenglamalardir. Bu yerda c –butun son, d esa musbat va biror sonning kvadrati bo'lmagan butun son. Bunday tenglamalar cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin. Agar d manfiy butun son yoki musbat kvadrat son bo'lsa, Pell tenglamasi ko'pi bilan chekli sondagi yechimlarga ega bo'ladi.

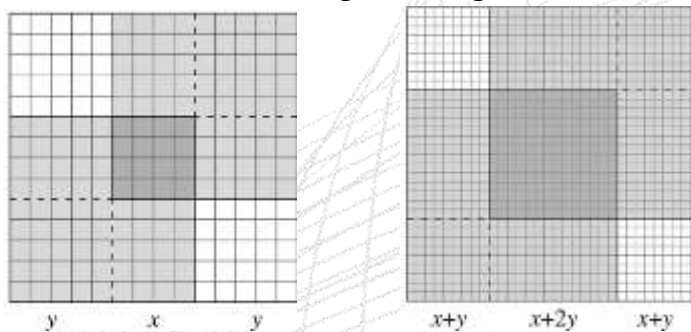
Ushbu tenglamalar 1730-yilda Leonard Eyler tomonidan xatolik tufayli 17-asr ingliz olimi **Jon Pell** nomi bilan bog'langan. Bu afsuslanarli holat edi, chunki matematika tarixchisi E. T. Bell yozganidek: „Pell matematik jihatdan hech kim emas edi va insoniy jihatdan u ochiqchasiga firibgar edi. Uning ismini darsliklardan olib tashlash vaqti allaqachon kelgan.”

Ba'zi mualliflar bu tenglamalarni Ferma tenglamalari deb ham atashadi, chunki Per de Ferma 1657-yilda bir nechta matematikga yo'llagan maktubida $x^2 - 61y^2 = 1$ tenglamasini butun sonlarda yechishni taklif qilib, ularning zamonaviy tarixini boshlab bergan edi. Biroq, bu tenglamalar Fermadan ancha oldin Hindistonda Brahmagupta (taxminan milodiy 598–665 yillar) va boshqalar tomonidan o'rganilgan.

Methods

$x^2 - 2y^2 = 1$ Pell tenglamasi

Pell tenglamalarini yechishning standart usuli uzluksiz kasrlar nazariyasiga asoslanadi. Bizning $x^2 - 2y^2 = 1$ tenglamasini yechishga yondashuvimiz ko'proq kombinatorik xarakterga ega bo'lib, u 1-rasmdagi kichik kvadratlarni sanashga asoslangan.



1(a)-rasm.

1(b)-rasm

1(a)-rasmdagi kichik kvadratlar sonini kiritish-chiqarish usuli yordamida sanash $(x + 2y)^2 = 2(x + y)^2 - x^2 + 2y^2$ natijasini beradi. Bundan quyidagi kelib chiqadi:

$$x^2 - 2y^2 = 2(x + y)^2 - (x + 2y)^2.$$

Shunga o'xshash tarzda, 1(b)-rasmdagi kichik kvadratlarni sanash $(3x + 4y)^2 = 2(2x + 3y)^2 - (x + 2y)^2 + 2(x + y)^2$ natijasini beradi. Shunday qilib, $2(x + y)^2 - (x + 2y)^2 = (3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2$. Demak,

$x^2 - 2y^2 = (3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2$ va shuning uchun:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad (1)$$

bo'lishi uchun faqat va faqat $(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = 1$ bo'lishi kerak. Endi biz (1) ifodadan foydalanib, $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi (x_n, y_n) ketma-ketligini hosil qilamiz. Buning uchun quyidagi **rekurent** formuladan foydalanamiz:

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Bunda boshlang'ich yechim $(x_0, y_0) = (1, 0)$ deb olinadi. n ning 0 dan 5 gacha bo'lgan qiymatlari uchun natijalar 1 –jadvalda keltirib o'tilgan.

n			2	3	4	5
-----	--	--	---	---	---	---

x_n			17	99	577	3363
y_n			12	70	408	2378

1-jadval.

Endi biz x_n va y_n larning aniq ifodalarini topamiz. $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ va $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ lar shuni anglatadiki:

$$x_{n+1} = 3x_n + 4(2x_{n-1} + 3y_{n-1}) = 3x_n + 8x_{n-1} + 3(x_n - 3x_{n-1}) = 6x_n - x_{n-1}$$

va shunga o'xshash:

$$y_{n+1} = 2(3x_{n-1} + 4y_{n-1}) + 3y_n = 3(y_n - 3y_{n-1}) + 8y_{n-1} + 3y_n = 6y_n - y_{n-1}$$

$\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklari uchun

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \quad \text{va} \quad G_y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$$

generatsiya funksiyalarini hisoblash orqali quyidagilarni hosil qilamiz.

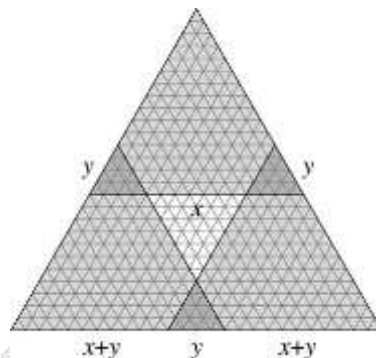
$$G_x(t) = \frac{1-3t}{1-6t+t^2} \quad \text{va} \quad G_y(t) = \frac{2t}{1-6t+t^2}$$

Bu yerdan sodda kasrlarga yoyish va geometrik progressiya yordamida quyidagi yakuniy formulalarni hosil qilamiz:

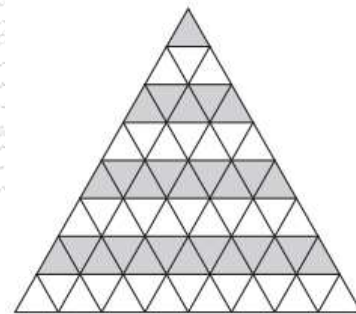
$$x_n = \frac{1}{2} \left[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \right], \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \right]$$

$x^2 - 3y^2 = 1$ Pell tenglamasi

Ushbu Pell tenglamasini yechish uchun, avval 2(a)-rasmidagi kichik uchburchaklarni kiritish-chiqarish usuli yordamida sanaymiz. Bunda har bir katta uchburchak o'z ichiga kichik uchburchaklarning kvadrat sonini olishini eslatib o'tamiz, bu 2(b)-rasmida ko'rsatilgan.



2(a)-rasm.



2(b)-rasm

Bu quyidagicha natijani beradi:

$$(2+3y)^2 = 3(x+2y)^2 + x^2 - 3y^2$$

va shunga ko'ra:

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad (2)$$

bo'ladi, faqat va faqat $(2x+3y)^2 - 3(x+2y)^2 = 1$ bo'lsa,

Biz endi $x_n^2 - y_n^2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi (x_n, y_n) ketma-ketligini hosil qilish uchun (2) formuladan hamda $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ rekurent bog'lanishlardan foydalanamiz. Boshlang'ich yechim sifatida $(x_0, y_0) = 1$ olinadi, bu esa n ning 0 dan 6 gacha bo'lgan qiymatlari uchun 2-jadvaldagi natijani beradi.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1	2	7	26	97	362	1351
y_n	0	1	4	15	56	209	780

2-jadval.

Endi biz x_n va y_n yechimlari uchun aniq ifodalarni topamiz. $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ va $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ lar $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ va $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ ekanligini anglatadi. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklari uchun

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \quad \text{va} \quad G_y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$$

generatsiya funksiyalarini hisoblash orqali quyidagilarni hosil qilamiz.

$$G_x(t) = \frac{1-2t}{1-4t+t^2} \quad \text{va} \quad G_y(t) = \frac{t}{1-4t+t^2}$$

Bundan esa,

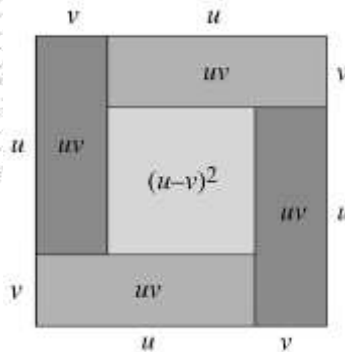
$$x_n = \frac{1}{2} \left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \right] \quad \text{va} \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \right]$$

$x^2 - dy^2 = 1$ Pell tenglamasi

Biz endi $x^2 - dy^2 = 1$ tenglamasini ko'rib chiqamiz, bu yerda d musbat va to'la kvadrat emas. Shuni ta'kidlash kerakki, $(x, y) = (1, 0)$ barcha d lar uchun yechim hisoblanadi va d to'la kvadrat bo'lganda bu yagona yechimdir. $x^2 - dy^2 = 1$ tenglamasi (musbat va to'la kvadrat bo'lmagan d uchun) agar kamida bitta musbat butun sonli yechimga ega bo'lsa, u holda cheksiz ko'p musbat butun sonli yechimlarga ega ekanligining isboti quyidagi oddiy lemmaga asoslanadi.

Lemma. $u, v > 0$ bo'lganda, $(u+v)^2 = (u-v)^2 + 4uv$.

Isbot. Umumiylikga ziyon yetkazmagan holda $u \geq v$ deb olamiz va 3-rasmga qarash yetarlidir.



3-rasm.

1-Teorema. Agar $x^2 - dy^2 = 1$ tenglama (d musbat va to'la kvadrat emas) musbat butun sonlarda bitta yechimga ega bo'lsa, u holda u cheksiz ko'p yechimga ega.

Isbot. Yuqoridagi lemmada $u = x^2$ va $v = dy^2$ deb belgilash kiritamiz, natijada

$$(x^2 + dy^2)^2 = (x^2 - dy^2)^2 + 4dx^2y^2$$

hosil bo'ladi yoki shunga ekvivalent ravishda,

$(x^2 + dy^2)^2 - d \cdot (2xy)^2 = (x^2 - dy^2)^2$. Shunday qilib, agar $x^2 - dy^2 = 1$ bo'lsa, u holda $(x^2 + dy^2)^2 - d \cdot (2xy)^2 = 1$ bo'ladi. Demak, agar (x, y) juftligi $x^2 - dy^2 = 1$ tenglamaning musbat butun sonli yechimi bo'lsa, u holda $(x^2 + dy^2, 2xy)$ ham uning yechimidir.

Eslatma. Bu isbot faqat tenglamaning butun yechimlari soni cheksiz ko'p ekanligini anglatadi, ammo barcha yechimlarni ham hosil qilmaydi.

Biz endi $(x_0, y_0) = (1, 0)$ boshlang'ich yechimdan boshlab, $x_{n+1} = ax_n + dby_n$ va $y_{n+1} = bx_n + ay_n$ rekurent ifodalar yordamida $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ tenglamani qanoatlantiruvchi (x_n, y_n) ketma-ketligini hosil qilamiz. E'tibor bering, $(a, b) = (x_1, y_1)$, shuning uchun:

$$x^2 - dy^2 = (x_1x + dy_1y)^2 - d(y_1x + x_1y)^2$$

$x_1^2 - dy_1^2 = 1$ shart bilan berilgan $x_{n+1} = x_1x_n + dy_1y_n$ va $y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n$ rekurent ifodalari quyidagilarni anglatadi:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1x_n + dy_1(y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}) = x_1x_n + dy_1^2x_{n-1} + x_1(x_n - x_1x_{n-1}) = \\ &= 2x_1x_n + (dy_1^2 - x_1^2)x_{n-1} = 2x_1x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

Huddi shunday $y_{n+1} = 2x_1y_n - y_{n-1}$ ni topamiz. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklari uchun

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \quad \text{va} \quad G_y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$$

generatsiya funksiyalarini hisoblash orqali quyidagilarni hosil qilamiz.

$$G_x(t) = \frac{1 - x_1 t}{1 - 2x_1 t + t^2} \quad \text{va} \quad G_y(t) = \frac{y_1 t}{1 - 2x_1 t + t^2}$$

natijalarni beradi, ulardan esa quyidagilarni olamiz:

$$x_n = \frac{1}{2} \left[(x_1 + y_1 \sqrt{d})^n + (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n \right], \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left[(x_1 + y_1 \sqrt{d})^n - (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n \right]$$

Bular elementar kasrlarga yoyish va geometrik progressiya yordamida keltirib chiqariladi.

Results

1- („Deyarli“ muntazam Geron uchburchaklari).

Geron uchburchagi deb tomonlari (a, b, c) va (S) yuzasi butun sonlardan iborat bo'lgan uchburchakka aytiladi. „Deyarli“ muntazam Geron uchburchagi esa tomonlari ketma-ket butun sonlardan iborat bo'lgan Geron uchburchagidir. Misol uchun, tomonlari $(3, 4, 5)$ yuzasi 6 bo'lgan yoki tomonlari $(13, 14, 15)$ va yuzasi 84 bo'lgan uchburchaklar.

Masala shundan iboratki, yana shunday uchburchaklar mavjudmi?

Yechim. Ixtiyoriy (a, b, c) uchburchakning yuzasi uchun Geron formulasi bilan berilishini eslaymiz

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{Bu yerda } p \text{ — yarim perimetri, } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

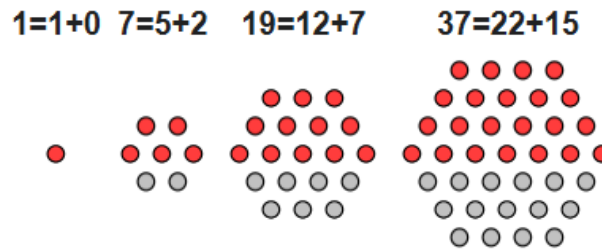
Masala shartiga ko'ra tomonlarini $(b-1, b, b+1)$ deb belgilasak, $p = \frac{3b}{2}$ va $S^2 = \frac{3b^2(b^2-4)}{16}$ kelib chiqadi. Demak, b — juft son bo'lishi kerak, shuning uchun $b = 2x$ deb olsak, $S^2 = 3x^2(x^2 - 1)$ hosil bo'ladi. Bundan $x^2 - 1$ soni 3 ko'paytirilganda biror sonning kvadrati bo'lishi kerak ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $x^2 - 1 = 3y^2$. Bu esa biz yuqorida yechgan Pell tenglamasidir.

Shunday qilib, 2-jadvaldagi (x_n, y_n) juftliklari tomonlari $(2x_n - 1, 2x_n, 2x_n + 1)$ va yuzasi $S = 3x_n y_n$ bo'lgan uchburchaklarni beradi. Misol uchun, $n = 3$ bo'lganda tomonlari $(51, 52, 53)$ va yuzasi $S = 1170$ bo'lgan uchburchak hosil bo'ladi. Shuningdek, bunday uchburchaklarning ichki chizilgan aylana radiusi r ham butun son bo'ladi: $r = y_n$.

2-Masala. („Kvadrat beshburchakli“ sonlar).

Beshburchakli son — deb shunday figurativ natural songa aytiladiki, u tekislikda nuqtalarni muntazam beshburchak konturlari bo'ylab joylashtirish orqali hosil qilinadi; bunda

beshburchaklarning barcha konturlari bitta umumiy uchga ega bo'ladi va natijada hosil bo'lgan sxemadagi o'zaro ustma-ust tushmaydigan (farqli) nuqtalar soni aynan shu beshburchakli songa teng bo'ladi. 4-rasmga qarang.



4-rasm.

m –tartibli beshburchakli sonlarquyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$P_m = \frac{m(3m-1)}{2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Kvadrat beshburchakli son—deb shunday „beshburchakli“ songa aytiladiki, bir vaqtda ham „beshburchakli“ son, ham to'la kvadrat bo'lishi zarur.

Masala shundan iboratki, „Kvadrat beshburchakli“ sonlar soni nechta?

Yechim. Bir qarashda, $P_1 = 1 = 1^2$ bo'lgan oddiy holat yagona kvadrat beshburchakli sondek ko'rinishi mumkin. Ammo $P_m = k^2$ sharti $m(3m-1) = 2k^2$ tenglamaga ekvivalentdir. Bu ifodada to'la kvadratga ajratsak, quyidagi ko'rinishga keladi:

$$(6m-1)^2 - 6 \cdot (2k)^2 = 1$$

Bu $x^2 - 6y^2 = 1$ ko'rinishidagi **Pell tenglamasidir**, bu yerda $x = 6m-1$ va $y = 2k$.

$x^2 - 6y^2 = 1$ tenglamani yechish uchun

$$x^2 - 6y^2 = (5x+12y)^2 - 6(2x+5y)^2$$

ayniyatdan va boshlang'ich $(x_0, y_0) = (1, 0)$ yechimidan foydalanib, n ning 0 dan 5 gacha bo'lgan qiymatlari uchun 3-jadvaldagi natijalar olingan.

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	5	49	485	4801	47525
y_n	0	2	20	198	1960	19402

3-jadval.

$x = 6m-1$ bo'lganligi sababli, bizga $x_n \equiv -1 \pmod{6}$ sharti bo'lishi kerak bo'ladi, bu esa n toq son bo'lishi kerakli anglatadi. Shunday qilib:

$(x_3, y_3) = (485, 198)$ juftligi $P_{81} = 9804 = 99^2$ natijasini beradi.

$(x_5, y_5) = (47525, 19402)$ juftligi $P_{7921} = 94109401 = 9701^2$ natijasini beradi va hokazo.

Discussion

Mazkur maqola Diofant tenglamalarini **butun sonlar geometriyasi** asosida tahlil qilish ularning yechimlarini chuqurroq va intuitivroq tushunishga imkon berishini ko'rsatdi. An'anaviy algebraik usullar yechimlarning mavjudligi va umumiy tuzilishini aniqlashda samarali bo'lsa-da, vizual yondashuvlar ushbu yechimlarning **geometrik mazmuni va simmetriyasini** ochib beradi.

Xususan, **Pell tenglamasi** panjara nuqtalari orqali talqin qilinganda, uning cheksiz ko'p butun sonli yechimga ega ekanligi va yechimlarning tartibli ravishda hosil bo'lishi yaqqol namoyon bo'ladi. Shuningdek, **Geron uchburchaklari** va **beshburchakli sonlar** misolida Diofant tenglamalarining figurativ va kombinatorik xususiyatlari aniq ko'rinadi.

Pedagogik jihatdan, vizual yondashuvlar murakkab mavzularni o'rganishni yengillashtiradi, talabalar mantiqiy va fazoviy tafakkurini rivojlantiradi hamda o'qitish samaradorligini oshiradi. Umuman, vizual metodlar Diofant tenglamalarini o'rganishda algebraik usullarni to'ldiruvchi muhim vosita sifatida namoyon bo'ladi.