# BAZI BIR SHEGARALIQ MÁSELELERDI SHESHIWDIŃ IZBE IZ JUWIQLASIWLAR USILI

**Qurbanbaev Ó.O.**

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, docent.

**Reimova L. J.**

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, stajyor oqıtıwshı.

**Jamalov Q. N.**

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, stajyor oqıtıwshı.

https://doi.org/10.5281/zenodo.13752886

***Annotaciya.*** *Maqalada ekinshi tártipli sızıqlı bolmaǵan differenciallıq teńleme ushın shegaralıq másele qarastırıladı. Bázi bir belgilew jasaw arqalı bul shegaralıq másele birirnshi tártipli differenciallıq teńlemeler sisteması ushın shegaralıq máselege alıp kelinedi hám shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń sanlı-analitikalıq uslı járdeminde juwıq sheshiledi, sol menen birge qatelik bahalanadı.*

***Gilt sózler:*** *Ekinshi tártipli sızıqlı bolmaǵan differenciallıq teńleme, birirnshi tártipli differenciallıq teńlemeler sisteması, shegaralıq másele, juwıq sheshim.*

## SOLVING SOME LIMITED PROBLEMS USING THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

***Abstract.*** *The article considers a constrained problem for a second-order nonlinear differential equation. Having made some notations, this limited problem is reduced to a value problem for a system of first-order differential equations and is solved destructively using a numerical-analytical method for solving value problems, and the error is estimated.*

***Key words.*** *Second-order nonlinear differential equation, system of first-order differential equations, value problem, approximate solution.*

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАДАЧА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИИ

***Аннотация.*** *В статье рассматривается ограниченная задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Сделав некоторые обозначения, данная ограниченная задача сводится к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка и решается деструктивно с помощью численно-аналитического метода решения ограниченных задач, при этом оценивается погрешность.*

***Ключевые слова.*** *Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, система дифференциального уравнения первого порядка, краевая задача, приближенное решение.*

---

Sızıqlı emes shegaralıq máselelardi úyreniwdiń házirgi zaman usılları ishinde keń taralǵan metodlardıń biri Samoylenkonıń sanlı-analitikalıq usılı bolıp, bul usıl izleniwshi sheshimdi analitikalıq kóriniste ańlatıwǵa imkan beredi [1-3].

Meyli bizge ekinshi tártipli

$$\frac{d^2y}{dt^2}=F\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right)$$

differenciallıq teńleme berilgen bolıp, bul differenciallıq teńleme ushın

$$y(0)=d_1,\quad y'(T)=d_2$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimdi juwıq dúziw máselesi qoyılǵan bolsın, bul jerde $F(t,y,y')$ funkciyası $(t,y,y')\in[0,T]\times D_1\times D_2$ oblastında anıqlanǵan hám úzliksiz funkciya. Máseleni sheshiwden aldın $y(t)=x_1(t),$ $y'(t)=x_2(t)$ belgilew kiritip, berilgen shegaralıq máseleni

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

$$x_1(0)=d_1,\quad x_2(T)=d_2 \tag{2}$$

kórinisindegi shártleri ajralǵan shegaralıq máselege alıp kelemiz, bul jerde

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},\quad f(t,x)=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,x_2)\\f_2(t,x_1,x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(t)\\F(t,x_1(t),x_2(t))\end{pmatrix}.$$

Bizge málim $f(t,x)$ funkciyası

$$(t,x)\in[0,T]\times D \tag{3}$$

oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz funkciya boladı, bul jerde $D=D_1\times D_2$. Aytayıq $f(t,x)$ funkciyası $t\in[0,T]$, $x,\ x',\ x''\in D$ ushın $M>0$ sanı menen shegaralanǵan hám $K>0$ sanı boyınsha Lipshic shártin qanaatlandırsın, yaǵniy (3) oblastta

$$|f(t,x)|\le M,\qquad |f(t,x'')-f(t,x')|\le K|x''-x'| \tag{4}$$

teńsizligi orınlı bolsın.

Sonıń menen birge, meyli (1),(2) shegaralıq máselesi $M, K$ parametrleri hám $T, d_1, d_2$ berilgenleri boyınsha tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) óziniń $\frac{1}{2}MT$ dógeregi menen $D$ oblastında jatatuǵın $D_0$ kópligi bos kóplik bolmasın, yaǵniy

$$D_0 \neq 0 \tag{5}$$

2). $Q = \frac{T}{\pi}K$ matricasınıń menshikli mánisleri absolyut mánisi boyınsha birden kishi bolsın, yaǵniy

$$\lambda_i(Q) < 1, \ i = 1,2 \tag{6}$$

Bul shártlerdiń hámmesi orınlanǵan jaǵdayda (2) shegaralıq shártti hárdayım qanaatlandıratuǵın hám (1),(2) shegaralıq máseleniń anıq sheshimine teń ólshewli umtılatuǵın funkciyalar izbe-izligin dúziw hám anıq sheshim arasındaǵı ayırmanı bahalaw imkanı bar boladı.

Bunıń ushın

$$x(t) = (1-\frac{t}{T})d(x_2(0)) + \frac{t}{T}d(x_1(T)) + \tag{7}$$

$$+\int_0^t \left[ f(s, x(s)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds \right] ds$$

integrallıq teńlemeni qarastıramız, bul jerde

$$d(x_2(0)) = \begin{pmatrix} d_1 \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = x(0),$$

$$d(x_1(T)) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = x(T).$$

(7) integral teńlemeniń sheshimi (1) differencial teńlemeni hárdayım qanaatlandıra bermeydi, biraq (2) shegaralıq shártlardiń ekewinde qanaatlandıradı. Eger (7) teńlemeniń sheshiminde qatnasatuǵın $d(x_2(0))$ hám $d(x_1(T))$ degi $x_2(0), x_1(T)$ parametrlerin tańlap alıw arqalı bul sheshimniń (1) teńlemenide qanaatlantdırıwın táminlew múmkin.

Usı máqsette (7) integral teńlemeniń sheshimin

$$x_{m+1}(t, x_{0T}) = (1-\frac{t}{T})d(x_2(0)) + \frac{t}{T}d(x_1(T)) + \tag{8}$$

$$+\int_0^t\left[f(s,x_m(s,x_{0T}))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,x_{0T}))ds\right]ds,\quad m=0,1,2,\ldots$$

izbe-iz juwıqlasıwlar usılı járdeminde sheshemiz, bul jerde $x_{0T}=(x_1(T),x_2(0))$. Bul (8) formula menen anıqlanatuǵın $x_m(t,x_{0T})$ funkciyalar izbe-izliginiń hár biri barláq $m$ ushın (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı.

Meyli $d(x_2(0))\in D_0$, $d(x_1(T))\in D_0$ bolsın dep uyǵarayıq. Ol jaǵdayda (8) formula menen anıqlanatuǵın $x_m(t,x_{0T})$ funkciyalar izbe-izligi $D$ oblasttan shıǵıp ketpeydi.

Haqıyqattanda dástlepki juwıqlasıwdı

$$x_0(t,x_{0T})=(1-\frac{t}{T})d(x_2(0))+\frac{t}{T}d(x_1(T))$$

dep alsaq, bul jaǵdayda

$$|x_1(t,x_{0T})-x_0(t,x_{0T})|\le\left|\int_0^t\left[f(s,x_m(s,x_{0T}))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,x_{0T}))ds\right]ds\right|$$

bolıp, lemma 1, [1] boyınsha

$$|x_1(t,x_{0T})-x_0(t,x_{0T})|\le\alpha_1(t)M\le\frac{1}{2}MT$$

boladı, bul jerde $\alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right)$. $d(x_2(0))\in D_0$, $d(x_1(T))\in D_0$ bolıwı sebepli

$$x_0(t,x_{0T})=(1-\frac{t}{T})d(x_2(0))+\frac{t}{T}d(x_1(T))\in D_0$$

bolıp, bunnan $x_1(t,x_{0T})\in D$ kelip shıǵadı. Procesti dawam etip, barlıq $m\ge 0$ hám $t\in[0,T]$, $x_0(t,x_{0T})\in D_0$ lar ushın (8) degi $x_m(t,x_{0T})$ funkciyalar izbe-iziginiń $D$ oblasttan shıǵıp ketpeytuǵınlıǵın kóriwge boladı.

$x_m(t,x_{0T})$ funkciyalar izbe-izliginiń jıynaqlı ekenligin kórsetiw ushın $j\ge 1$ bolǵanda $|x_{m+j}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})|$ ayırmanı bahalaymız. Lemma 1[1] ge tiykarlanıp $m\ge 1$ va $t\in[0,T]$ ushın

$$|x_{m+1}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})|\le$$

$$\le K(1-\frac{t}{T})\int_0^t|x_m(s,x_{0T})-x_{m-1}(s,x_{0T})|ds+\frac{t}{T}\int_t^T|x_m(s,x_{0T})-x_{m-1}(s,x_{0T})|ds$$

teńsizligine iye bolamız. Bul teńsizlikten

$$\left|x_{m+1}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})\right|\le K^m M\alpha_{m+1}(t) \tag{9}$$

teńsizligi kelip shıǵadı, bul jerde

$$\alpha_{m+1}(t)=(1-\frac{t}{T})\int_0^t\alpha_m(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\alpha_m(s)ds$$

Lemma [2,3] di esapqa alıp, (9) nı

$$\left|x_{m+1}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})\right|\le \tilde{\alpha}_1(t)\left(\frac{KT}{\pi}\right)^m M \tag{10}$$

kórinisinde jazıwǵa boladı, bul jerde

$$\tilde{\alpha}_1(t)=\frac{\pi}{3}\alpha_1(t)=\frac{2\pi}{3}t\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

Endi

$$x_{m+j}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})=(x_{m+j}(t,x_{0T})-x_{m+j-1}(t,x_{0T}))+$$
$$+(x_{m+j-1}(t,x_{0T})-x_{m+j-2}(t,x_{0T}))+\ldots+(x_{m+1}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T}))$$

teńliginen (10) ǵa tiykarlanǵan jaǵdayda barlıq $j\ge 1$ ushın

$$\left|x_{m+j}(t,x_{0T})-x_m(t,x_{0T})\right|\le \tilde{\alpha}_1(t)\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{T}{\pi}K\right)^{m+i}M=\tilde{\alpha}_1(t)\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}M \tag{11}$$

teńsizligi orınlı boladı. (6) nı esapqa alsaq

$$\sum_{i=0}^{j-1}(\frac{T}{\pi}K)^{m+i}\le Q^m\sum_{i=0}^{\infty}Q^i=Q^m(E-Q)^{-1},$$

$$\lim_{m\to\infty}Q^m=0 \tag{12}$$

bolıp, $m\to\infty$ da (11) hám (12) qatnaslarǵa tiykarlanǵan jaǵdayda $x_m(t,x_{0T})$ funkciyalar izbe-izliginiń $t\in[0,T]$, $x_0(t,x_{0T})\in D_0$ ushın teń ólshewli jıynaqlı ekenligin kóriwge boladı:

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t,x_{0T})=x^*(t,x_{0T}). \tag{13}$$

Al $x_m(t,x_{0T})$ funkciyalardıń hár biri (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlanlandırıwı sebepli olardıń shegi bolǵan $x^*(t,x_{0T})$ funkciyası hám bul shártlerdi qanaatlandırıwı hám $j\to\infty$ da (11) den

$$\left| x^*(t, x_{0T}) - x_m(t, x_{0T}) \right| \le \alpha_1(t) Q^m (E - Q)^{-1} M$$

kórinisinde anıq hám juwıq sheshimler arasındaǵı qátelikti bahalawǵa boladı.

Egerde (13) ni esapqa alıp, (8) den $m \to \infty$ daǵı shek alsaq, onda $x^*(t, x_{0T})$ funkciyası (7) integral teńlemeniń sheshimi boladı.

Ekinshi tárepten berilgen (1) differencial teńlemeniń

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

teńlemesine teń kúshli bolıwı, $(x_1(T),\ x_2(0))$ parametrler sistemasınıń mánislerin

$$\Delta(x_{0T}) = \frac{1}{T}(d(x_1(T)) - d(x_2(0))) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, x_{0T}))ds \qquad (14)$$

vektor-funkciyası nolge aylanatuǵın etip tańlap alıwǵa sebep boladı.

Solay etip, qarastırılıp atırǵan máseleni tómendegi teorema arqalı juwmaqlawǵa boladı.

**Teorema.** Meyli $f(t, x)$ funkciyası (3) oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz funkciya bolıp, bul funkciya ushın (4)-(6) shártler orınlanatuǵın bolsın. Bul jaǵdayda (8) nıń $m \to \infty$ daǵı shegi bolıp esaplanatuǵın $x^*(t, x_{0T})$ funkciyası (1),(2) shegaralıq máseleniń sheshimi bolıp esaplanadı, egerde $(x_1(T),\ x_2(0))$ parametrler sistemasınıń $x_{0T}^*$ mánislerinde (14) formula menen anıqlanatuǵın funkciya nolge aylanatuǵın bolsa, yaǵniy

$$\Delta(x_{0T}^*) = 0.$$

$x^*(t) = x^*(t, x_{0T}^*)$ anıq sheshim hám $x_m(t, x_{0T})$ juwıq sheshim arasındaǵı qátelik ushın

$$\left| x^*(t) - x_m(t, x_{0T}) \right| \le \alpha_1(t) Q^m (E - Q)^{-1} M$$

teńsizlik orınlı boladı.

## REFERENCES

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - К.: Вища шк. изд-во при Киев.
2. ун-те, 1976. - 179 с.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно – аналитические методы
4. исследования решений краевых задач. –Киев: Наук.думка. 1985. -224 с.

5. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев:
6. Наук. думка, 1992. - 280 с.
7. Abdikalikov F., Reymova L. The optimal risk of estimator of conditional distribution function in a model of heteroscedastic regression with weakly dependent observations //Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2018. – Т. 1. – №. 4. – С. 162-167.
8. Qurbanbaev Ó. O., Djakaeva K. D., Askarova D. B. IMPULS TÁSIRINE IYE SIZIQLI BIRTEKLI EMES DIFFERENCIALLIQ TEŃLEMELER SISTEMASI USHIN ÚSH TOCHKALI SHEGARALIQ MÁSELELERDI SHESHIWDIŃ IZBE IZ JUWIQLASIWLAR USILI //Modern Science and Research. – 2024. – Т. 3. – №. 7.