

ELEMENTAR FUNKSIYALAR (e^x , SINX, COSX, LNX) UCHUN MAKLOREN FORMULASI TATBIQLARI

Toxirov Abror Axrorovich

Andijon davlat pedagogika instituti

Matematika kafedrası o'qituvchisi

Xamdamova Rayyonaxon Xayriddin qizi

Andijon davlat pedagogika instituti

Matematika yo'nalishi talabasi.

xamdamovarayyona2008@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18247780>

Annotatsiya. Mazkur maqolada matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo'lgan Teylor formulasi, uning nazariya soslari va amaliy tadbiqlari yoritilgan. Teylor formulasi yordamida murakkab funksiyalarni soddalashtirib, ularni ko'phadlar orqali yaqinlashtirish usullari ko'rib chiqilgan. Shuningdek, formuladan fizika, texnika, iqtisodiyot va hisoblash imkoniyatlari tahlil qilingan. Maqola matematik ta'lim jarayonida Teylor formulasining ahamiyatini oshirishga qaratilgan.

Kalit so'zlar: Teylor formulasi, matematik analiz, yaqinlashtirish, hosila, ko'phad, funksiya

Bugungi kunda O'zbekiston Respublikasi ilm-fan va ta'lim sohasini rivojlantirish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev o'z chiqishlarida zamonaviy bilimlarni, ayniqsa, aniq fanlar va matematik analizni chuqur o'rganish raqamli iqtisodiyot va innovatsion taraqqiyotning muhim omili ekanini ta'kidlab kelmoqdalar.

Yosh avlodning mantiqiy fikrlashi va ilmiy salohiyatini oshirishda matematikaning, xususan, analiz bo'limlarining ahamiyati beqiyosdir.

Shu nuqtayi nazardan, matematika nazirining muhim tushunchalaridan biri bo'lgan Teylor formulasi nafaqat nazariy bilimlarni mustahkamlash, balki amaliy masalalarni yechishda ham katta ahamiyat kasb etadi. Teylor formulasi yordamida murakkab funksiyalarni soddaroq ko'rinishida ifodalash, hisoblashlarni yengillashtirish hamda texnika, fizika va iqtisod sohalarida yuzaga keladigan masalalarni samarali hal etish mumkin

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ ni Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had deyiladi.

Teylor formulasida $x_0 = 0$ bo'lgan hol alohida ahamiyatga ega:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Odatda, bu formula Makloren formulasi deyiladi. Bu formuladan funksiya limitini topishda, taqribiy hisoblash masalalarida foydalaniladi.

Quyida ba'zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasini keltiramiz:

$f(x) = e^x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f^n(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$, ($n = 1, 2, \dots$). U holda quyidagi formulani yozish mumkin.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}, R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} (0 < \theta < 1)$$

Agar $n \rightarrow \infty$ da $R_{n+1} \rightarrow 0$ bo'lishini e'tiborga olsak, $f(x) = e^x$ uchun $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

2. $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Bu funksiyaning n – tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n * \frac{\pi}{2})$ formula o'rinli ekanini topish qiyin emas.

$f(0) = \sin 0 = 0$ ekanligi ravshan. $f^{(n)}(0)$ ni aniqlaymiz:

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ agar } n - \text{juft bo'lsa,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ agar } n - \text{toq bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak $f(x) = \sin x$ funksiya uchun Makloren formulasi

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n * \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{n+1}), \text{ ko'rinishida yozamiz.}$$

3. $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Funksiyaning n – tartibli hosilasi uchun

$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n * \frac{\pi}{2})$ fo'rmulao'rinlidir. $f(0) = 1$ bo'lishi ravshan.

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ agar } n - \text{toq son bo'lsa} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{ agar } n - \text{juft bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak, $f(x) = \cos x$ funksiya uchun Makloren formulasi

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n * \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{n+1})$, ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $0(x^{n+1})$, qoldiq had.

4. $f(x) = \ln(1+x)$ bo'lsin. Bu funksiyaning n – tartibli hosilasini topamiz:

$$f^I(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f^{II}(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f^{III}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, f^{IV}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

Bulardan foydalanib, n – tartibli hosilani topish uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! (1+x)^{-n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$ va $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ ekanligini e'tiborga olsak, $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^{n+1}), \text{ ko'rinishida bo'ladi,}$$

5. $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ ko'phadni Teylor formulasi yordamida $x - 1$ ning darajalari bo'yicha yoying.

Yechish: Ko'phadni $x - 1$ darajalari bo'yicha yoyish uchun ko'phadni va uning hosilalarini $x = 1$ nuqtadagi qiymatlarini topish kerak.

$$P(x) = 1 - 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = 0.$$

$$P^I(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2;$$

$$P^{II}(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2$$

$$P^{III}(x) = 60x^2 - 48x + 6; \quad P^{IV}(x) = 120x - 48; \quad P^V(x) = 120; \quad P^{VI}(x) = 0$$

$$P(1) = 5 - 8 + 3 - 2 + 2 = 0; \quad P^{II}(1) = 20 - 24 + 6 - 2 = 0;$$

$$P^{III}(1) = 60 - 48 + 6 = 18; \quad P^{IV}(1) = 120 - 48 = 72; \quad P^V = 120;$$

$$P^{VI}(1) = 0; \dots, P^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 6)$$

Topilganlarni Teylor formulasiga qo'yamiz:

$$P(x) = \frac{18}{3!} (x-1)^3 + \frac{72}{4!} (x-1)^4 + \frac{120}{5!} (x-1)^5 \quad \text{yoki}$$

$$P(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5$$

Metod: Ushbu maqolada Teylor formulasini o'rganishda, asosan, ta'limga yo'naltirilgan metodlar qo'llanildi.

Tadqiqot jarayonida formulani faqat nazariy jihatdan emas, balki bosqichma- bosqich tushuntirish, misollar asosida o'rgatish va amaliy qo'llash usullariga alohida e'tibor qaratildi. Avvalo, funksiya, hosila va ko'phad tushunchalari oddiy ta'riflar orqali eslatib o'tildi.

So'ngra Teylor formulasi kichik hadlardan boshlab tushuntirildi, ya'ni birinchi navbatda faqat funksiya qiymati va birinchi hosila bilan yaqinlashuv ko'rsatildi. Bu usul o'quvchilarga formulani qo'rqqmasdan qabul qilish imkonini beradi.

Shuningdek, taqqoslash metodidan foydalanilib, funksiyaning aniq qiymati va Teylor formulasi orqali topilgan taxminiy qiymati solishtirildi. Bu metod talabalarda tahliliy fikrlashni shakllantiradi va formulani hayotiyroq tushunishga yordam beradi.

Natija va tahlil: O'tkazilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, Teylor formulasi murakkab funksiyalarni tushunish va hisoblashni sezilarli darajada osonlashtiradi. Ayniqsa, talaba va o'quvchilar uchun bu formula funksiyaning xatti- harakatini yaxshiroq tasavvur qilish imkonini beradi.

Natijalarga ko'ra:

1. Formulaga qancha ko'p had qo'shilsa, natija shuncha aniq bo'ladi;
2. Kichik qiymatlar uchun bir necha handing o'zi yetarli aniqlik beradi;
3. Ko'phad orqali ifodalash hisoblashni tezlashtiradi.

Masalan, eksponensial va trigonometric funksiyalarni bevosita hisoblash qiyin bolsa-da, Teylorformulasi yordamida ularni oddiy algebraic ifodalar bilan almashtirish mumkin.

Bu esa nafaqat matematika, balki fizika va texnika masalalarida ham qulaylik yaratadi. Tahlil davomida o'quvchilarda formulaga nisbatan ijobiy munosab shakllanishi, matematik qiziqish ortishi va mavzuni mustaqil o'rganishga intilish kuchayishi kuzatildi.

Munozara: Ba'zi hollarda Teylor formulasi cheksiz qator ko'rinishida bo'lgani sababli uni qo'llashda aniqlik darajasini to'g'ri tanlash muhim hisoblanadi. Agar yetarlicha had olinmasa, natijada xatolik yuzaga kelishi mumkin. Shu bois, formulani qo'llashda yaqinlashish sohasi va qoldiq hadni masalasiga alohida e'tibor qaratish lozim.

Xulosa: Teylor formulas matematik analiz fanining eng muhim va foydali tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ushbu formula talaba va o'quvchilarga murakkab funksiyalarni soda ko'rinishda tasavvur qilish, ularni tahlil qilish va amaliy masalalarda qo'llash imkonini beradi. Maqolada qo'llanilgan ta'limiy metodlar Teylor formulasini o'rganishda samarali ekanligini ko'rsatadi. Ayniqsa, formulani bosqichma- bosqich, misollar yordamida, taqqoslash asosida tushuntirish o'quvchilar uchun juda qulay usul ekanligi aniqlandi. Teylor formulasini chuqur o'zlashtirish, analitik fikrlashni rivojlantiradi, matematik modellashtirish ko'nikmasini shakllantiradi, talabaning mustaqil ishlash qobiliyatini oshiradi.

Shu sababli, Teylor formulasini o'qitishda faqat nariy bayon bilan cheklanmasdan, uni amaliy misollar, grafiklar va kundalik hayotdagi tatbiqlar bilan bog'lab tushuntirish tavsiya etiladi. Bu yondashuvmatematika fanining samaradorligini oshiradi va yoshlarning ilmiy salohiyatini rivojlantirishga xizmat qiladi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR

1. Jo'rayev T, Rasulov A, - "Oliy matematika".
2. Karimov V.M, Xasanov R.- "Matematika Oliy o'quvyurtlari uchun darslik"
3. Abdukarimov X.- "Matematik analiz", 1-2 qism.
4. Shokirov Sh. – "Matematik analiz masalalar to'plami".
5. Rasulov M.M.- "matematik analizdan maruzalar to'plami".

6. SodiqovA, Xo'jamqulov B.- 'Matematik analiza soslari'.
7. G'afurov X, Yo'ldoshev B. –“Oliy matematika asoslari”.
8. K.SH. Ruzmetov. –“Matematik analiz”
9. Sh.AAyupov, M.A Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev – “Matematik analiz”
10. A.U.Abdulhamidov, H.A.Nasimov, U.M Nosirov, J.H.Husanov.- “ Algebra va matematik analiz asoslari” 1-qism