

## YUQIMLI KASALLIKLAR RIVOJLANISH DINAMIKASINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

A.T. Xaydarov<sup>1</sup>

G.B. Barliqbaeva<sup>2</sup>

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti<sup>1,2</sup>,  
magistrant<sup>2</sup>

[abdugapparxaydarov1953@gmail.com](mailto:abdugapparxaydarov1953@gmail.com)<sup>1</sup>

[gulibakhadirovna0509@gmail.com](mailto:gulibakhadirovna0509@gmail.com)<sup>2</sup>

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18508590>

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada yuqumli kasalliklarning populyatsiya ichida tarqalish jarayonini matematik modellashga asoslangan SIR va SEIR epidemiologik modellarining tuzilishi, parametrlarining fizik mazmuni hamda ularning kasallik dinamikasini tavsiflashdagi ahamiyati tahlil qilinadi. SIR modeli sezgir, infeksiyalangan va sog'aygan guruhlar o'rtasidagi o'zaro o'tishlarni tasvirlasa, SEIR modeli inkubatsion davrning mavjudligini hisobga olish orqali epidemiyaning yanada realistik rivojlanishini ifodalaydi. Maqolada modellar tenglamalari, yuqish va sog'ayish ko'effitsientlarining roli, shuningdek epidemiyaning asosiy reproduktiv ko'effitsienti  $R_0$  ning mazmuni yoritilgan. Olingan natijalar matematik modellashning kasalliklarning tarqalishini prognozlash, epidemiologik xavflarni baholash va profilaktik choralarni rejalashtirishdagi amaliy ahamiyatini ko'rsatadi.

**Kalit so'zlar:** Pandemiya, SIR va SEIR modeli, infeksiyaning tarqalishi, populyatsiya dinamikasi, differensial tenglamalar.

### Kirish

Tibbiyotda epidemiya deb infeksiyon kasallikning aholi orasida progressiv tarzda kengayib borishi, ya'ni ma'lum hududda odatda qayd etiladigan kasallanish darajasidan sezilarli darajada oshib ketishi va favqulodda vaziyat yuzaga kelishiga sabab bo'lishi mumkin bo'lgan tarqalishiga aytiladi [1]. Agar epidemiya juda katta hududlarga yoki bir vaqtning o'zida bir nechta davlatlarning hududiga tarqalsa, bunday holat pandemiya deb ataladi.

Epidemiyalarning rivojlanishi va tarqalish mexanizmlarini o'rganish — yangi dori vositalarini izlab topish, emlash tadbirlarini o'tkazish hamda profilaktik choralarni amalga oshirish bilan bir qatorda — kasalliklar bilan kurashishda muhim ilmiy-uslubiy yo'nalish hisoblanadi [5].

Kasalliklarning tarqalish mexanizmlarini tadqiq etishda matematik apparatdan foydalanishga birinchi urinishni D.Bernulli amalga oshirgan. Keyingi muhim qadam esa U.Farr tomonidan qo'yilgan bo'lib, u chechakdan o'lim ko'rsatkichlarini tahlil qilish uchun normal taqsimotni qo'llagan [5].

O'zlaridan avvalgi tadqiqotchilarning ishlariga tayangan holda, britaniyalik olimlar A.Kermak va U.Makkendrik bugungi kunda keng qo'llaniladigan SIR modelini ishlab chiqdilar [2]. Ushbu qisqartma inglizcha Susceptible – Infected – Recovered so'zlaridan olingan bo'lib, ular mos ravishda “sezgirlar – infeksiyalanganlar – sog'ayganlar” degan ma'noni anglatadi.

### SIR modeli

SIR modeli (Kermak–Makkendrik modeli) — kompartement modellarning eng sodda turlaridan biri bo'lib, unda differensial tenglamalar tizimi yordamida sezgirlar (S), infeksiyalanganlar (I) va sog'ayganlar (R) guruhlari dinamikasi tasvirlanadi. Ko'plab boshqa epidemiologik modellar aynan shu asosiy modelning hosilalari sifatida ishlab chiqilgan [7].

SIR tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta \cdot I(t) \cdot S(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta \cdot I(t) \cdot S(t)}{N} - \gamma \cdot I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma \cdot I(t), \end{cases} \quad (1)$$

$S(t)$  – vaqtning  $t$  momentidagi sezgir (yuqmagan) individlar soni;

$I(t)$  – vaqtning  $t$  momentidagi infeksiyalangan individlar soni;

$R(t)$  – vaqtning  $t$  momentidagi kasallikni boshdan kechirgan (sog'aygan) individlar soni;

$\beta$  – individlar o'rtasidagi aloqa intensivligi va ushbu aloqadan so'ng infeksiya yuqish chastotasini belgilovchi yuqish koeffitsienti;

$\gamma$  – infeksiyalangan individlarning sog'ayish intensivligi (sog'ayish koeffitsienti);

$N$  – populyatsiyaning umumiy soni.

(1)-sistemaning birinchi tenglamasi kasallikka sog'lom, ammo moyil (sezgir) bo'lgan individlar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalaydi. Ularning soni vaqt o'tishi bilan infeksiyalangan individlar bilan bo'ladigan kontaktlar soniga proportsional ravishda kamayadi.

Bunday kontakt natijasida yuqtirish sodir bo'ladi va sezgir individ infeksiyalanganlar sinfiga o'tadi.

(1)-sistemaning ikkinchi tenglamasi yuqtirilgan individlar sonining ortish tezligi sog'lom va infeksiyalangan individlar o'rtasidagi kontaktlar soniga proportsional ravishda ortishini, hamda so'nggilarning sog'ayishi jarayoni ta'sirida kamayishini ko'rsatadi.

(1)-sistemaning uchinchi tenglamasi bir birlik vaqt ichida sog'aygan individlar soni infeksiyalangan individlar soniga proportsional ekanini ifodalaydi. Boshqacha aytganda, har bir kasallangan individ ma'lum vaqt o'tgach sog'ayishi lozim [5].

Shu tariqa, SIR modelida kasallik "sezgilar infeksiyalanadi, so'ng sog'ayadi" sxemasi bo'yicha rivojlanishini ko'ramiz.

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0 \quad (2)$$

sharti populyatsiya sonining o'zgarmasligini ifodalaydi (ya'ni kasallikdan o'lim holatlari hisobga olinmaydi).

Bir vaqtning o'zida kasallanganlar soni  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  parametri orqali aniqlanadi. Bu miqdor "asosiy reproduktiv koeffitsient" deb ataladi [5].

SIR modelining rivojlanishi natijasida quyidagi modellar paydo bo'lgan [8]:

**SIRS** – "sezgilar – infeksiyalanganlar – sog'ayganlar – sezgilar": vaqtinchalik immunitetga ega kasalliklar dinamikasini tasvirlovchi model (sog'aygan individlar vaqt o'tishi bilan yana sezgir holatga qaytadi);

**SEIR** – "sezgilar – kontaktda bo'lganlar (Exposed) – infeksiyalanganlar – sog'ayganlar": inkubatsion davrga ega kasalliklarning tarqalishini tasvirlash uchun mo'ljallangan model.

**SIS** – “sezgirlar – infeksiyalanganlar –sezgirlar”: immunitet hosil bo‘lmaydigan kasalliklarning tarqalishini tasvirllovchi model;

**MSEIR** – “tug‘ilgan paytdan immunitetga ega bo‘lganlar (Maternally derived immunity) – sezgirlar – kontaktda bo‘lganlar – infeksiyalanganlar – sog‘ayganlar”: homiladorlik davrida olingan immunitetni hisobga oluvchi model.

### **SEIR modeli**

**SEIR** modeli – vaqtinchalik immunitetga ega kasalliklar dinamikasini tasvirllovchi modeldir (sog‘aygan individlar vaqt o‘tishi bilan yana sezgir holatga qaytadi). Ushbu model eng xavfli epidemiyalarning rivojlanishini tavsiflaydi, chunki uzoq inkubatsion davr kasallikni o‘z vaqtida aniqlashni qiyinlashtirishi mumkin. Model populyatsiyada kasallik katta sonli individlarni qamrab olishi mumkin bo‘lgan holatlarda oqibatlarni baholash uchun mo‘ljallangan.

Ko‘plab kasalliklarda yashirin yoki latent faza mavjud bo‘lib, bu davrda individ allaqachon virus bilan duch kelgan, lekin hali o‘zi yuqtiruvchi bo‘lmagan. Kontaktdan kasallikning boshlanish bosqichigacha bo‘lgan ushbu davr SIR modeliga latent/exposed populyatsiyani E ko‘rsatkichini qo‘shish orqali kiritilishi mumkin. Shu holatda kontaktga duch kelgan, ammo hali yuqtiruvchi bo‘lmagan individlar S kategoriyasidan E kategoriyasiga va keyin E dan I kategoriyasiga o‘tadilar [6].

Infeksiya “sezgirlar – kontaktda bo‘lganlar – infeksiyalanganlar – sog‘ayganlar” sxemasi bo‘yicha rivojlanadi va quyidagi tenglamalar tizimi bilan tavsiflanadi [3,4]:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu \cdot N - \mu \cdot S(t) - \beta \cdot \frac{I(t)}{N} \cdot S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta \cdot \frac{I(t)}{N} \cdot S(t) - (\mu + \alpha) \cdot E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha \cdot E(t) - (\gamma + \mu) \cdot I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma \cdot I(t) - \mu \cdot R(t), \end{cases} \quad (3)$$

bu yerda:  $\mu$  – o‘lim darajasi (mortallik);

$\alpha$  – kasallikning o‘rtacha inkubatsion davriga teskari qiymat;

$E(t)$  – vaqtning  $t$  momentidagi kasallikni tashuvchilar (latent yoki kontaktda bo‘lgan) individlar soni.

SIR modelidagi (1) kabi, (3) sistemaning birinchi tenglamasi sog‘lom va shu bilan birga kasallikka sezgir bo‘lgan individlar soni vaqt o‘tishi bilan infeksiyalanganlar bilan aloqalarning soniga mutanosib ravishda kamayishini bildiradi. Kasallik yuqqach, sog‘lom individ ushbu kasallik bo‘yicha kontaktda bo‘lgan yoki infeksiya tashuvchisi holatiga o‘tadi [5].

(3) sistemaning ikkinchi tenglamasi kontaktda bo‘lgan holatdan infeksiyalangan (kasallangan) holatga o‘tishda vaqt kechikishini hisobga oladi. Bu kechikish kasallikning inkubatsion davriga teng bo‘lgan vaqt davomida sodir bo‘ladi.

(3) sistemaning uchinchi tenglamasi “kontaktda bo‘lgan” holatdan “infeksiyalangan” holatga o‘tishni tasvirlaydi.

(3) sistemaning to‘rtinchi tenglamasi esa bir vaqt birligida sog‘aygan individlar soni infeksiyalanganlar soniga mutanosib ravishda oshishini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, har bir holatda individ o‘lishi mumkinligi har bir tenglamada  $\mu$  koeffitsienti orqali hisobga olingan [5].



Boshqacha aytganda, har bir vaqt momentida har bir individ ma'lum ehtimol bilan yuqtirilishi, biroq vaqt o'tib kasallanishi, so'ng sog'ayishi yoki vafot etishi mumkin. Shu bilan birga, populyatsiya soni  $N=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$  vaqt o'tishi bilan doimiy emas. Epidemiyaning

intensivligi esa asosiy reproduktiv koeffitsient ( $R$ ) orqali tasvirlanadi:  $R_0 = \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \cdot \frac{\beta}{\mu + \gamma}$ .

### Xulosa

Ushbu tadqiqotda yuqumli kasalliklarning populyatsiya ichida tarqalish jarayonini modellashtirishga asos bo'luvchi klassik SIR hamda inkubatsion davrni hisobga oluvchi SEIR modellari ilmiy asosda tahlil qilindi. SIR modeli infeksiyaning sodda shakllarini tasvirlashga imkon berishi, SEIR modeli esa kasallikning yashirin bosqichini (E-kompartiment) hisobga olish orqali real epidemiyalarni yanada aniqroq modellashtirishi ko'rsatib berildi.

Tahlil natijalariga ko'ra, epidemiya rivojlanishi ko'plab parametrlar — yuqish koeffitsienti  $\beta$ , sog'ayish tezligi  $\gamma$ , o'lim darajasi  $\mu$ , inkubatsion davr  $\alpha$  hamda populyatsiya sonining dinamikasiga — bevosita bog'liqligi aniqlandi. Model tenglamalarining fizik ma'nosi izohlanishi epidemiyaning vaqt bo'yicha qanday rivojlanishini tushunish, yuqori xavf davrlarini aniqlash va profilaktik choralarni ilmiy asosda belgilashga yordam beradi.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Фрумер, А. Л. Эпидемические и эндемические болезни // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). – СПб., 1890-1907.
2. Kermack W. O., A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack, A. G. McKendrick // Proc. R. Soc. Lond. Series A. – Vol. 115. – No. 772. (August 1, 1927). – pp. 700-721.
3. Kermack, W.O. Contributions to the mathematical theory of epidemics –I / W.O. Kermack, A.G. McKendrick // Bulletin of Mathematical Biology. – 1991. – V. 53. – P. 33-55.
4. Интегрированные математические модели, описывающие сложные биологические процессы / Е. Л. Мищенко [и др.] // Биофизика. – 2017. – Т. 62. – № 5. – С. 949-968.
5. О. И. Канищева, В. С. Боровков, Математическое моделирование динамики развития инфекционных заболеваний с использованием библиотек Python Numpy и Matplotlib, - 10 с.
6. В.А. Акимов, М.В. Бедило, Е.О. Иванова, Математические модели эпидемий и пандемий как источников чрезвычайных ситуаций биолого-социального характера, © Технологии гражданской безопасности, 2022.
7. Б.О. Жумартова, Р.С. Ысмагул, Применение SIR модели в моделировании эпидемий, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова (Казахстан, г. Костанай), DOI:10.24412/2500-1000-2021-12-2-6-9.
8. Haydarov A.T., Barliqbaeva G.B., Yuqimli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish. «Математическая физика и смежные вопросы современного анализа»: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 60-летию со дня рождения профессора Д.К. Дурдиева (10–11 октября 2025 года, Бухара, Узбекистан). – Бухара. Изд-во «Дурдона». 2025. 31-33.