CHEGARAVIY NUQTANING DIRIXLE MASALASIGA NISBATAN REGULYARLIGI

To‘ychiyev Xusniddin Jonuzokovich
ATMU “Matematika” kafedrasi 2-kurs magistranti.
N. Dilmurodov
ATMU “Matematika” kafedrasi professori, f.m.f.n.
https://doi.org/10.5281/zenodo.19405593

Garmonik funksiya va uning sodda xossalari

Agar $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = u(x)$ haqiqiy qiymatli funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib $\left(u \in C^2(D)\right)$, u D da ushbu

$$\Delta u = 0 \quad \left(\Delta u \overset{def}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \tag{1}$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, bunday u funksiya D sohada garmonik deb ataladi.

Masalan, $n = 1$ holida Laplas tenglamasi

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \ (x - \text{ haqiqiy o`zgaruvchi})$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi, ravshanki, chizqli funksiyalardan iborat bo‘ladi:

$$u = kx + b \ (k, b - \text{const}).$$

Demak, bir haqiqiy o‘zgaruvchining har qanday garmonik funksiyasi chiziqli funksiyadir.

Argumentlar soni ikki va undan ortiq bo‘lsa,

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n + b$$

chiziqli (aniqrog’i: affin) garmonik funksiyalardan boshqa garmonik funksiyalar ham mavjud. Masalan, $n = 2$ holida $u = k\ln(x_1^2 + x_2^2) + b$ funksiya $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ sohada, $n \ge 3$ holida esa $u = \frac{k}{r^{n-2}}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, funksiya $D = \mathbb{R}^n \setminus \{(0;0;...;0)\}$ sohada garmonik bo‘ladi.

Ravshanki, fazoni tayinlangan $a \in \mathbb{R}^n$ vektorga parallel ko‘chirishda, ya’ni $x \to x + a$ almashtirilishida D sohada garmonik funksiya $\tilde{D} = D + a = \{x + a | x \in D\}$ sohada garmonik funksiyaga o‘tadi. Bunda Laplas operatori invariant bo‘ladi (o‘zgarmaydi).

Fazoni $x \to kx \ (k \ne 0)$ gomotetik almashtirilishida ham funksiyaning garmonikligi saqlanadi. Bunda Laplas operatori k^2 ga ko‘payadi.

Ortogonal almashtirish, $x \to Ax, A -$ ortogonal matritsa, ya’ni $A^{-1} = A^*$ ($* -$transpozitsiya belgisi), bajarilganda garmonik funksiya garmonik funksiya bilan almashadi. Bunda Laplas operatori invariant bo’ladi.

$\mathbb{R}^n \ (n > 2)$ fazoda $S_1(0) = \{x | \, |x| < 1\}$ birlik sferaga nisbatan inversiya almashtirilishini qaraylik:

$$x=\frac{1}{|\tilde{x}|^2}\tilde{x},\ \tilde{x}=\frac{1}{|x|^2}x.$$

Bu almashtirishda $S_1(0)$ sfera nuqtalari qo‘zg‘almaydi, bu sfera tashqarisi uning ichiga, ichi esa tashqarisiga akslanadi. $u(x)$ funksiyadan ushbu

$$\tilde{u}(\tilde{x})=\frac{1}{|\tilde{x}|^{n-2}}u\left(\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^{n-2}}\right) \tag{2}$$

funksiyani tuzaylik. Bu Kelvin almashtirishi deyiladi. $\tilde{D}$ bilan D ning qaralayotgan inversidagi aksini belgilaylik.

Teorema1. Agar $u(x)$ funksiya D da garmonik bo‘lsa, $u(x)$ dan Kelvin almashtirishi (2) orqali topilgan $\tilde{u}(\tilde{x})$ funksiya $\tilde{D}$ da garmonik bo‘ladi.

Bu tasdiq bevosita (lekin ancha uzoq hisoblashlar yordamida) tekshiriladigan quyidagi ayniyatdan kelib chiqadi:

$$\Delta\tilde{u}(\tilde{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}_j^2}=\frac{1}{|\tilde{x}|^{n+2}}\Delta u(x).$$

Kelvin almashtirishini $a\in\mathbb{R}^n$ markazli birlik (yoki r radiusli) sfera $S_1(a)$ $\left(S_r(a)\right)$ga nisbatan ham aniqlash mumkin. Bunda ham garmonik funksiya hosil bo‘ladi.

Agar D soha cheksiz uzoqlashgan nuqtani o‘z ichiga olsa, garmonik funksiyadan cheksizlikda ($|x|\to\infty$) $n=2$ holida chegaralanganlik, $n>2$ holida esa kamida $|x|^{2-n}$ kabi nolga intilish talab qilinadi.

Garmonik funksiyaning quyidagi xossasi o‘rtacha (arifmetik) qiymat teoremasi deyiladi:

Teorema 2. D sohada $u(x)$ funksiya garmonik bo‘lib, $\bar{B}_r(x_0)$ yopiq shar D da joylashsa, bu funksiyaning shar markazidagi qiymati uning $S_r(x_0)$ sferadagi o‘rtacha (arifmetik) qiymatiga teng:

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{S_r(x_0)}u(x)ds_x. \tag{3}$$

bu yerda $\omega_n=\frac{1}{\Gamma(n/2)}2\pi^{n/2}$ – $\mathbb{R}^n$ dagi birlik sfera $\left(|x|=1\right)$ sirt yuzasi (Γ – gamma-funksiya), $\omega_n r^{n-1}=\int_{S_r(0)}ds_x$ – r radiusli sfera sirt yuzasi, ds_x – $S_r(x_0)$ $\left(|x-x_0|=r\right)$ sfera yuza elementi.

Agar (3) formulani $|x-x_0|=\rho\le r$ sfera uchun

$$\rho^{n-1}u(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|x-x_0|=\rho}u(x)ds_x$$

Ko‘rinishda yozib, uni ρ bo‘yicha $\rho\in[0,r]$ oraliqda integrallasak, quyidagi formula hosil bo‘ladi:

$$u(x_0)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int\limits_{|x-x_0|\le r} u(x)dx. \tag{4}$$

bu yerda $\dfrac{\omega_n r^n}{n}=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}r^n-\mathbb{R}^n$ dagi r radiusli shar $\left(|x|\le r\right)$ hajmi. (4) formula garmonik funksiya uchun shar bo‘yicha o‘rtacha (arifmetik) qiymat formulasi deyiladi.

Lebeg misoli

Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi ba’zi “sodda” sohalarda (chegara Lyapunov sirtidan iborat bo‘lmaganda) yechimga ega bo‘lmasligi mumkin. Bu tasdiqni isbotlovchi Lebeg misolini keltiramiz. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\}$ fazoda $0\le x\le 1, y=0, z=0$ kesmada (uni S bilan belgilaymiz) $\mu(x)=x$ zichlik bilan taqsimlangan massa potensialini qaraylik:

$$u(x,y,z)=\int_0^1\frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2+z^2}}. \tag{12}$$

Bu potensial S kesmadan tashqarida aniqlangan. Integralni hisoblab, bu potensialni $\rho=\sqrt{y^2+z^2}\ne 0$ bo‘lganda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$u(x,y,z)=\varphi(x,\rho)-2x\ln\rho,$$

$$\varphi(x,\rho)=\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}-\sqrt{x^2+\rho^2}+x\ln\left(\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right). \tag{13}$$

(12) dan quyidagi asimptotik tenglik ham kelib chiqadi:

$$u(x,y,z)=O\left(\tfrac{1}{r}\right),\ r\equiv\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty. \tag{14}$$

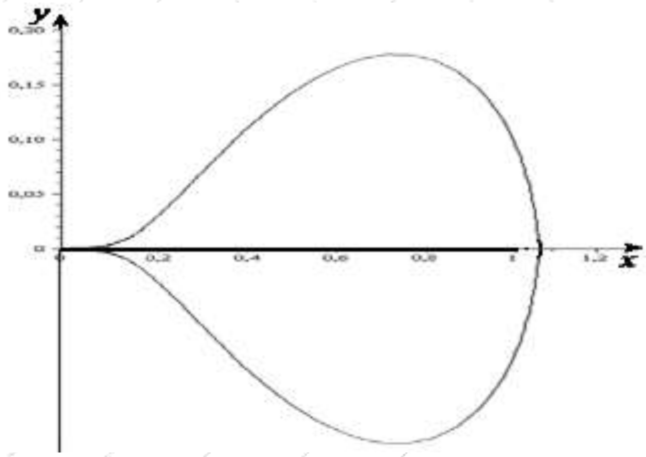
$u(x,y,z)$ funksiyaning sath sirtlari

$$\varphi(x,\rho)-2x\ln\rho=c\ \ (c=\text{const})$$

tenglama bilan beriladi. Ular aylanma sirt bo‘ladi (aylanish o`qi - $x$ o`qi). $c>1$ bo‘lganda bu sirt $x\ge 0$ yarimfazoda joylashgan, chunki $x<0$ bo‘lganda (12) ga ko‘ra

$$0<u(x,y,z)\le u(x,0,0)=1+x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<1.$$

Sath sirtlari $c>1$ bo`lganda “uchli nok sirtiga” o‘xshaydi; ular koordinatalar boshigacha “yetib keladi”: $x\to 0$ da $\rho\to 0$ (1- rasm.). Bu sirtlarga $(0;0;0)$ nuqtani qo‘shib qo‘yamiz. Sirtlarning koordinatalar boshiga urinishi cheksiz tartibli bo‘ladi.



1- rasm. $u(x, y, z) = 2$ sath sirtining $z = 0$ kesimi.

Biror $c > 1$ li sath sirti chegaralagan chegaralannagan G sohani qaraylik. G sohada ∂G da $u\big|_{\partial D} = \varphi(\xi) = c$ chegaraviy shartli (tashqi) Dirixle masalasini qo`yaylik. (12) formula bilan aniqlangan $u(x, y, z)$ funksiya G da garmonik, ∂G ning koordinatalar boshidan farqli nuqtalarida $u(x, y, z) = c$, lekin $(x, y, z) \to (0;0;0)$ da turli yo‘llar bo‘ylab turli $\alpha \in [1; c]$ limitlar hosil bo‘ladi, ya’ni $u(x, y, z)$ funksiya $\overline{G}$ da uzluksiz emas. Isbot qilish mumkinki, agar qaralayotgan Dirixle masalasining cheksizlikda (14) shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo‘lsa, u albatta aytilgan $u(x, y, z)$ funksiya bilan ustma-ust tushadi. Bu yechimning $\overline{G}$ da uzluksiz bo`lishiga zid. Shunday qilib, qo`yilgan Dirixle masalasi yechimga ega emas.

Endi $R = 1/2$ radiusli $(1/2;0;0)$ markazli sferaga nisbatan Kelvin almashtirishini bajarsak, G soha chegaralangan $\overset{?}{G}$ sohaga o‘tadi va shu soha uchun hosil bo‘luvchi mos Dirixle masalasi yechimga ega bo‘lmaydi. $\overset{?}{G}$ soha olmaga o‘xshash bo‘ladi, lekin uning chegarasi koordinatalar boshiga cheksiz tartibli urinadi (juda ham uchli “voronka” shardan chiqarib tashlangan).

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. -208 с.
2. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. Курант Р., Гилберт Д. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. -831 с.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частных производных. М.: Наука, 1976. -392 с.