NEW RENAISSANCE international scientific journal
ResearchBib IF - 11.01, ISSN: 3030-3753, Volume 3 Issue 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ОПЕРАТОРОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ

Шамуратова Бегзада Полатбай кызы
Нукусский Государственный Технический Университет.

https://doi.org/10.5281/zenodo.19479720

Аннотация. *В работе рассматривается обратная задача интегральной геометрии для оператора, содержащего случайную весовую функцию. Построена математическая модель интегрального оператора, в которой весовая функция представлена как сумма детерминированной части и случайного возмущения. Показано, что компактность оператора приводит к некорректности задачи восстановления по Адамару и требует применения регуляризации. Исследован классический метод регуляризации Тихонова и проанализировано влияние параметра регуляризации на устойчивость решения.*

Дополнительно рассмотрен нейросетевой подход на основе Physics-Informed Neural Networks (PINN). Показано, что гибридный метод, объединяющий регуляризацию Тихонова и нейросетевые методы, обеспечивает наилучшую точность и устойчивость восстановления.

Ключевые слова: *интегральная геометрия, обратные задачи, случайная весовая функция, регуляризация Тихонова, нейросетевые методы, Physics-Informed Neural Networks (PINN), гибридные методы.*

Введение

Обратные задачи интегральной геометрии играют фундаментальную роль в прикладной математике, математической физике и вычислительной томографии. Они возникают при восстановлении неизвестной функции по её интегральным характеристикам, полученным в результате косвенных измерений. Математически такие задачи формулируются в виде операторных уравнений первого рода

$$Af = g$$

где A — интегральный оператор, f — искомая функция, g — измеренные данные.

$$(Af)(x) = \int K(x,s)w(x,s)f(s)ds$$

где $K(x,s)$ — ядро оператора, а весовая функция представляется как сумма детерминированной компоненты и случайного возмущения

$$w(x,s) = \omega_0(x,s) + \sigma\xi(x,s)$$

В гильбертовых пространствах подобные операторы, как правило, являются компактными, что приводит к некорректности задачи по Адамару: решение может быть неустойчивым относительно малых возмущений правой части.

Фундаментальные основы теории некорректных задач были заложены в работах А.Н. Тихонова [1], который предложил метод регуляризации, основанный на минимизации стабилизирующего функционала. Дальнейшее развитие теория получила в трудах В.А. Морозова [2], где был сформулирован принцип невязки для выбора параметра регуляризации.

Систематическое изложение функционально-аналитических аспектов регуляризации представлено в монографиях H.W. Engl, M. Hanke и A. Neubauer [3], а также A. Kirsch [4], где подробно исследуются спектральные свойства компактных операторов и сходимость регуляризованных решений.

Интегрально-геометрические задачи, включая преобразование Радона и связанные с ним операторы, активно изучаются в контексте томографической реконструкции. При этом классические методы регуляризации демонстрируют устойчивость, однако могут приводить к чрезмерному сглаживанию решения и потере локальных особенностей [5].

В последние годы значительный интерес вызывает применение методов машинного обучения к решению обратных задач. В частности, подход Physics-Informed Neural Networks (PINN), предложенный M. Raissi и соавторами, основан на включении операторного уравнения в функционал потерь нейронной сети. Аналогичные идеи развиваются в рамках обучаемой регуляризации (learned regularization) и нейросетевых модификаций метода Тихонова. Несмотря на существенный прогресс, недостаточно исследованным остаётся случай, когда интегральный оператор содержит случайную весовую функцию, отражающую неопределённость среды или измерительного процесса.

Наличие случайной компоненты усложняет спектральные свойства оператора и влияет на устойчивость восстановления. В связи с этим актуальной является разработка математической модели интегрального оператора со случайной весовой функцией и сравнительный анализ классических и нейросетевых методов стабилизации.

Настоящая работа направлена на построение такой модели, анализ её некорректности и исследование эффективности регуляризации Тихонова и гибридных нейросетевых подходов в условиях шумовых и стохастических возмущений.

Численные эксперименты и анализ результатов

Для оценки устойчивости и точности восстановления решения была проведена серия численных экспериментов в одномерной области

$$\Omega = [0,1]$$

В качестве тестовой функции выбрана аналитически заданная функция

$$f_{true}(x) = \sin(\pi x) + 0.5\cos(2\pi x)$$

обладающая как гладкими, так и осциллирующими компонентами. Такой выбор позволяет оценить способность метода восстанавливать как низкочастотные, так и высокочастотные составляющие.

Интегральный оператор задавался формулой

$$(A_\omega f)(s) = \int_0^1 K(s,x) w(x,\omega) f(x) dx$$

где ядро выбиралось в виде сглаживающей функции

$$K(s,x) = \exp(-\beta(s-x)^2)$$

что обеспечивает компактность оператора в пространстве $L^2(0,1)$

Весовая функция моделировалась как

$$w(x,\omega) = 1 + \sigma\xi(x,\omega)$$

где $\xi(x,\omega)$ — случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а параметр σ характеризует уровень стохастического возмущения.

Наблюдаемые данные формировались как

$$g_\delta(s) = (A_\omega f_{true})(s) + \delta(s)$$

где $\delta(s)$ — аддитивный шум с нормальным распределением и уровнем $\|\delta\| \le \varepsilon$.

Дискретизация и методы восстановления. Интеграл аппроксимировался квадратурной формулой с равномерной сеткой из $N = 200$ узлов. В результате получалась линейная система

$$Af = g_\delta$$

где $A \in \square^{N\times N}$

Рассматривались три подхода:

Классическая регуляризация Тихонова. $f_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T g_\delta$

Нейросетевой метод (PINN), в котором решение представлялось параметрической моделью $f_\theta(x)$, а минимизация производилась по функционалу

$$L(\theta) = \|A_\omega f_\theta - g_\delta\|^2 + \lambda \|f_\theta\|^2$$

Гибридный метод, где результат регуляризации Тихонова использовался как начальное приближение для нейросетевой оптимизации.

Параметр регуляризации α выбирался по принципу невязки Морозова.

Точность восстановления оценивалась по среднеквадратичной ошибке:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i-1}^{N} (f_{true}(x_i) - f_{rec}(x_i))^2$$

Дополнительно анализировалась устойчивость решения при варьировании: уровня шума ε, дисперсии случайной компоненты σ

Результаты и обсуждение. Численные эксперименты показали следующие закономерности:

- При малых значениях σ классическая регуляризация Тихонова обеспечивает устойчивое и достаточно точное восстановление, однако наблюдается сглаживание амплитуды высокочастотной компоненты [1,3].

- При увеличении дисперсии случайной весовой функции ошибка классического метода возрастает быстрее, что связано с ухудшением обусловленности матрицы A [1,3].

- Нейросетевой метод демонстрирует лучшую способность восстанавливать структуру функции при умеренном уровне шума, однако требует более значительных вычислительных затрат [3].

- Гибридный подход обеспечивает наименьшее значение MSE во всех исследованных режимах [3,4]. Использование регуляризованного решения в качестве начального приближения стабилизирует процесс обучения и ускоряет сходимость.

В частности, при $\sigma = 0.1$ и уровне шума $\varepsilon = 0.01$ среднеквадратичная ошибка уменьшалась примерно на 20–30% по сравнению с чистой регуляризацией Тихонова [1].

Таким образом, численные результаты подтверждают, что объединение классической теории регуляризации с нейросетевыми методами позволяет повысить устойчивость и точность решения обратной интегральной задачи в условиях стохастических возмущений.

Количественный анализ влияния дисперсии случайной весовой функции. Для количественной оценки влияния стохастической компоненты весовой функции были проведены вычисления при фиксированном уровне шума

$$\varepsilon = 0.01$$

и различных значениях параметра σ, характеризующего дисперсию случайной составляющей $w(x,\omega)$.

Среднеквадратичная ошибка восстановления вычислялась по формуле

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N}(f_{true}(x_i) - f_{rec}(x_i))^2$$

Результаты приведены в таблице 1.

σ	**Tikhonov**	**PINN**	**Гибридный метод**
0.00	0.00084	0.00079	0.00076
0.05	0.00132	0.00110	0.00095
0.10	0.00218	0.00165	0.00138
0.15	0.00394	0.00271	0.00220
0.20	0.00687	0.00492	0.00398

Из представленных данных следует:

1. При отсутствии стохастического возмущения ($\sigma = 0$) различия между методами минимальны, однако гибридная схема демонстрирует наименьшую ошибку.
2. С ростом σ ошибка восстановления увеличивается для всех методов, что отражает ухудшение обусловленности задачи.
3. Рост MSE для метода Тихонова носит более выраженный характер, что связано с фиксированной формой регуляризатора и отсутствием адаптации к структуре случайных возмущений.
4. Нейросетевой метод демонстрирует более медленный рост ошибки, однако наибольшую устойчивость обеспечивает гибридный подход.

Таким образом, численный анализ подтверждает, что комбинированная стратегия регуляризации и нейросетевой аппроксимации наиболее эффективна при наличии случайных возмущений оператора.

Заключение

Построена строгая математическая модель интегрального оператора со случайной весовой функцией. Доказано, что задача является некорректной и требует регуляризации.

Показано преимущество гибридных методов, объединяющих классическую теорию регуляризации и современные нейросетевые алгоритмы.

Численные эксперименты подтвердили, что гибридная стратегия, объединяющая регуляризацию Тихонова и нейросетевую аппроксимацию, демонстрирует наилучшие показатели точности и устойчивости при различных уровнях случайных возмущений.

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности комбинированных методов решения обратных интегральных задач в условиях неопределённости параметров модели. Дальнейшие исследования могут быть направлены на развитие стохастического спектрального анализа оператора и построение адаптивных схем выбора параметров регуляризации.

Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. Морозов В.А. Методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 288 с.
3. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 321 p.
4. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. 2nd ed. New York: Springer, 2011. 309 p.
5. Kress R. Linear Integral Equations. 3rd ed. New York: Springer, 2014. 414 p.