

NOCHIZIQLI PARABOLIK TENGLAMALARNI SONLI YECHISH VA SIFAT XOSSALARINI TADQIQ ETISH (KOSHI MASALASI)

Yusupbayeva Sabohat Oybekovna

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti

Amaliy matematik mutaxassisligi 1-kurs magistranti.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20043313>

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada nochiziqli parabolik turdagi tenglamalar uchun, Koshi masalasini yechishning zamonaviy sonli usullari va yechimlarning o'ziga xos sifat xossalari tadqiq etiladi. Tadqiqot davomida diffuziya va manba funksiyalarining nochiziqlik darajasi yechimning chekli vaqtda cheksizlikka intilishi (*blow-up*) va issiqlikning lokallasishi (*localization*) kabi fundamental hodisalarga ta'siri o'rganilgan. Masalani sonli yechish uchun turg'un chekli ayirmalar sxemasi taklif etilgan va hisoblash tajribalari orqali asoslangan.

Аннотация. В данной научной статье исследуются современные численные методы решения задачи Коши для нелинейных уравнений параболического типа, а также качественные свойства их решений. В ходе исследования изучалось влияние степени нелинейности функций диффузии и источника на такие фундаментальные явления, как стремление решения к бесконечности в конечное время (*blow-up*) и локализация тепла (*localization*). Для численного решения задачи предложена схема устойчивых конечных разностей и обоснована вычислительными экспериментами.

Kalit so'zlar: nochiziqli parabolik tenglama, koshi masalasi, *blow-up*, lokallasish, chekli ayirmalar usuli, nyuton iteratsiyasi, issiqlik fronti.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, задача коши, *blow-up*, локализация, метод конечных разностей, итерация ньютона, тепловой фронт.

Zamonaviy matematik fizika va texnologik jarayonlarni modellashtirishda nochiziqli parabolik tenglamalar markaziy o'rin tutadi. Bunday modellar issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya, plazma fizikasi va kimyoviy reaksiyalar kabi murakkab jarayonlarni tavsiflashda qo'llaniladi.

Chiziqli nazariyadan farqli o'laroq, nochiziqli parabolik tenglamalar yechimlari o'ziga xos va kutilmagan sifat xususiyatlariga ega.

Ushbu maqolada aynan manba funksiyasiga ega bo'lgan nochiziqli muhitda jarayonlarning rivojlanishini tahlil qilish va ularning sonli yechimlarini olish algoritmini ishlab chiqish masalasi ko'riladi.

1. MASALANING MATEMATIK QO'YILISHI

Quyidagi ko'rinishdagi umumiy nochiziqli parabolik tenglama uchun, Koshi masalasini qaraymiz:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u^\beta, \quad x \in \square^1, \quad t > 0$$

Boshlang'ich shart (Koshi sharti):

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \square^1$$

Bu yerda:

$\sigma > 0$ — muhitning nochiziqlik darajasi

$\beta > 1$ — manba intensivligi

$u_0(x)$ — kompakt tashuvchiga ega bo'lgan manfiy bo'lmagan uzluksiz funksiya.

2. YECHIMLARNING SIFAT XOSSALARI TAHLILI

Nochiziqli parabolik sistemalarda diffuziya (so‘nish) va manba (o‘shish) jarayonlari o‘rtasidagi raqobat natijasida quyidagi sifat xossalari yuzaga keladi:

2.1. Blow-up (Portlash) effekti

Agar $\beta > \sigma + 1$ bo‘lsa, manba kuchi diffuziya kuchidan ustun keladi. Natijada, yechim chekli T^* vaqtda cheksizga aylanadi. Bu hodisa fizikada energiya to‘planishi yoki portlash jarayonlarining boshlanishini tavsiflaydi.

2.2. Yechimning lokallashishi

Kuchli nochiziqli muhitda issiqlik cheksiz masofaga tarqalmasdan, ma‘lum bir soha ichida qolib ketishi mumkin. Bu hodisa aynan $\beta = \sigma + 1$ bo‘lgan holatda (S-rejimi) yaqqol kuzatiladi.

3. SONLI YECHISH USULLARI VA ALGORITM

Tenglamaning nochiziqligi sababli biz **oshkormas chekli ayirmalar sxemasini** qo‘llaymiz. Fazoviy o‘zgaruvchi x bo‘yicha h va vaqt t bo‘yicha τ qadamlar bilan diskretlashtiramiz:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[A_{i+1/2}^{j+1} (u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - A_{i-1/2}^{j+1} (u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) \right] + (u_i^{j+1})^\beta$$

Ushbu sistema Nyuton-Rafson iteratsiya usuli yordamida har bir vaqt qatlamida yechiladi.

4. KOMPYUTER TAJRIBALARI VA NATIJALARNING FIZIK TAHLILI.

O‘tkazilgan hisoblash tajribalari quyidagi uchta asosiy fizik ssenariyni ochib berdi:

A) HS-rejimi ($\beta < \sigma + 1$): Issiqlik energiyasi manba tomonidan ishlab chiqarilgandan ko‘ra tezroq qo‘shni qatlamlarga uzatiladi. Natijada, haroratning keskin ko‘tarilishi kuzatilmaydi.

B) S-rejimi ($\beta = \sigma + 1$): “Nochiziqli to‘siq” effekti yuzaga keladi. Issiqlik fronti harakati to‘xtaydi ($v_{front} = 0$), ammo soha ichidagi energiya vaqt o‘tishi bilan cheksiz o‘shib boradi.

C) LS-rejimi ($\beta > \sigma + 1$): “Keskinlashish rejimi” (Blow-up). Energiya ajralishi shunchalik tez sodir bo‘ladiki, diffuziya uni tarqatishga ulgurmaydi.

5. GRAFIK TAHLIL

O‘tkazilgan sonli tajribalar natijasida quyidagi grafik natijalar olindi:

1. **Yechim profilining dinamikasi:** $\beta > \sigma + 1$ bo‘lganda, yechim markazida “O‘tkir cho‘qqi” (peak) hosil bo‘lishi grafikda aniq ko‘rindi.

2. **Amplituda o‘shishi:** $t \rightarrow T^*$ bo‘lganda funksiya grafigi vertikal holatga yaqinlashadi, bu chekli vaqtda yechimning portlashini isbotlaydi.

3. **Front trayektoriyasi:** S-rejimida front koordinatasi ma‘lum bir masofada gorizontol chiziqqa aylanadi, bu esa lokallashishning amaliy isbotidir.

Xulosa o‘rnida shuni aytishimiz kerakki tadqiqot natijasida nochiziqli parabolik tenglamalar uchun, Koshi masalasini sonli yechishning samarali algoritmi ishlab chiqildi.

Yechimlarning sifat xossalari - portlash va lokallashish chegaralari ham nazariy, ham amaliy jihatdan tasdiqlandi. Ushbu natijalar murakkab texnologik jarayonlarda energiya konsentratsiyasini boshqarishda muhim poydevor bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Samarskiy A.A. “Teoriya raznostnix sxem”. – M.: Nauka, 1989.

2. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P. “Rejimi s obostreniem”. – M.: Nauka, 1987.
3. Adambayev U.E., Yusupov Yu.S., Algoritmik tillar va dasturlash. C# tilida dasturlash asoslari. Darslik. – T.: “Universitet”, 2023. -272 b
4. Alimov Sh.O., Ashurov R.R. Matematik analiz. 1, 2, 3 q. -T.: “Mumtoz so’z”, 2018 yil.
5. Xudayberganov G., Vorisov AK, Mansurov XT, Shoimqulov BA Matematik analizdan Ma’ruzalar, I, II q. -T.: “Voris-nashriyot”, 2010 y