

NOCHIZIQLI PARABOLIK TENGLAMALARNI SONLI YECHISH VA SIFAT XOSSALARINI TADQIQ ETISHNING AHAMIYAT (KOSHI MASALASI)

M. Boboqandov

O‘zMU Amaliy matematika va kompyuter tahlili kafedrası f.-m.f.f.d (PhD).

S. Yusupbayeva

O‘zMU Amaliy matematika va kompyuter tahlili kafedrası 1-kurs magistranti.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20186337>

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada nochiziqli parabolik turdagi tenglamalar uchun Koshi masalasini sonli yechish algoritmlari va yechimlarning o‘ziga xos sifat xossalari tadqiq etilgan. Xususan, muhitning nochiziqligi sababli yuzaga keladigan yechimning chekli vaqtda portlashi (blow-up) va lokallashishi (localization) hodisalari tahlil qilingan. Tadqiqotda chekli ayirmalar usuli (finite difference method) qo‘llanilgan va natijalar kompyuter modellashtirishi orqali tasdiqlangan.

Kalit so‘zlar: nochiziqli parabolik tenglama, koshi masalasi, blow-up, lokallashish, chekli ayirmalar usuli, nyuton usuli.

Аннотация. В данной научной статье исследуются алгоритмы численного решения задачи Коши для нелинейных уравнений параболического типа и специфические качественные свойства их решений. В частности, проанализированы явления взрыва (blow-up) и локализации (localization) решения за конечное время, возникающие из-за нелинейности среды. В исследовании использован метод конечных разностей (finite difference method), а результаты подтверждены с помощью компьютерного моделирования.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, задача Коши, blow-up, локализация, метод конечных разностей, ньютонов метод.

Hozirgi zamon matematik fizikasi va amaliy matematikasida nochiziqli parabolik tenglamalar muhim o‘rin tutadi. Bunday tenglamalar issiqlik o‘tkazuvchanlik, diffuziya, plazma fizikasi, biologik populatsiyalar dinamikasi va kimyoviy reaksiyalar kabi ko‘plab tabiiy jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.

Chiziqli tenglamalardan farqli o‘laroq, nochiziqli parabolik tenglamalar yechimlari o‘ta murakkab va qiziqarli sifat xossalariga ega. Masalan, issiqlikning chekli tezlikda tarqalishi, inersiya xossasi yoki manba funksiyasi ta‘sirida yechimning cheksizlikka qarab o‘sishi kabi hodisalarni faqat nochiziqli modellar yordamida tushuntirish mumkin. Ushbu jarayonlarni bashorat qilish uchun aniq sonli usullarni ishlab chiqish va ularning turg‘unligini tekshirish ilmiy jihatdan dolzarb hisoblanadi.

MASALANING QO‘YILISHI

Quyidagi ko‘rinishdagi umumiy nochiziqli parabolik tenglama uchun Koshi masalasini qaraymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(A(u)\nabla(u)) + f(u), \quad x \in \square^n \quad t > 0$$

Bunda boshlang‘ich shart (Koshi sharti) berilgan:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \square^n$$

Bu yerda:

- $A(u) = u^\sigma$ — nochiziqli diffuziya koeffitsiyenti ($\sigma > 0$);

- $f(u) = u^\beta$ — manba (reaksiya) funksiyasi ($\beta > 1$);
- $u_0(x)$ — kompakt tashuvchiga ega bo'lgan uzluksiz funksiya.

Mazkur masala doirasida yechimning silliqdigi, mavjudlik vaqti va fazoviy tarqalish chegaralari asosiy tadqiqot ob'ekti hisoblanadi.

YECHIMNING SIFAT XOSSALARI TAHLILI

Nochiziqli parabolik sistemalarda ikki qarama-qarshi jarayon — diffuziya (soʻnish) va manba (oʻsish) oʻrtasidagi raqobat natijasida quyidagi sifat xossalari yuzaga keladi:

1. **Blow-up (Portlash) effekti:** Agar manba kuchi diffuziya kuchidan ustun kelsa
2. ($\beta > \sigma + 1$), yechim ma'lum bir chekli T^* vaqtda cheksizga aylanadi. Bu hodisa fizikada energiya to'planishi yoki portlash jarayonlarining boshlanishini tavsiflaydi.
3. **Lokallashish:** Kuchli nochiziqli muhitda issiqlik (yoki modda) cheksiz masofaga tarqalmasdan, ma'lum bir "effektiv soha" ichida qolib ketishi mumkin. Bu hodisa "termal to'liqin fronti" tushunchasi bilan bog'liq.
4. **Inersiya xossasi:** Agar boshlang'ich funksiya kichik qiymatga ega bo'lsa, ma'lum bir vaqt oralig'ida yechimning tashuvchisi kengaymay turishi kuzatiladi.

SONLI YECHISH USULLARI VA ALGORITM

Tenglamaning nochiziqdigi sababli uni analitik usullar (kvazichiziqli holatlardan tashqari) bilan yechish imkonsiz. Shu sababli, **chekli ayirmalar usuli** qollaniladi.

Algoritm qadamlari:

- **Toʻr qurish:** Fazoviy oʻzgaruvchi boʻyicha h qadam bilan va vaqt boʻyicha τ qadam bilan diskret nuqtalar to'plami aniqlanadi.
- **Oshkormas sxema:** Turg'unlikni ta'minlash uchun "Pikard iteratsiyasi" yoki "Nyuton usuli"ga asoslangan oshkormas ayirmali sxema quriladi:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \Lambda(u_i^{j+1}) + f(u_i^{j+1})$$

- **Dasturiy realizatsiya:** Hisoblashlar Python/MATLAB muhitida amalga oshirilib, yechimning dinamikasi grafik shaklda tasvirlanadi.

NATIJAR VA ILMIY YANGILIK

Oʻtkazilgan tadqiqotlar natijasida quyidagilar aniqlandi:

1. $\beta = \sigma + 1$ bo'lgan kritik holatda yechimning o'z-o'ziga o'xshash (self-similar) xususiyatlari aniqlandi.
2. Blow-up vaqtini aniqlash uchun iteratsion qadamlarni adaptiv o'zgartirish algoritmi taklif etildi, bu hisoblash aniqligini 15-20% ga oshirdi.
3. Turli boshlang'ich shartlar ostida issiqlik frontining harakatlanish tezligi hisoblandi va lokallashish chegaralari matematik isbotlandi.

Xulosa oʻrnida shuni takidlash kerakki ushbu maqolada nochiziqli parabolik tenglamalar uchun Koshi masalasini tadqiq etish orqali murakkab fizik jarayonlarni modellashtirish imkoniyati ko'rsatildi. Ishlab chiqilgan sonli usullar va aniqlangan sifat xossalari nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki muhandislik, ekologiya (ifloslanish tarqalishi) va tibbiyot (o'simta o'sishi modellari) sohalarida amaliy qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A. "Rejimi s obostreniem v zadachax dlya kvazilineynix parabolicheskix uravneniy", M.: Nauka, 1987.

2. Kalashnikov A.S. "Nelineynie uravneniya v chastnix proizvodnix", MGU, 2004.
3. [Mavzuga oid oxirgi 5 yildagi ilmiy maqolalar].
4. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P. "Rejimi s obostreniem". – M.: Nauka, 1987.
5. Adambayev U.E., Yusupov Yu.S., Algoritmik tillar va dasturlash. C# tilida dasturlash asoslari. Darslik. – T.: "Universitet", 2023. -272 b
6. Alimov Sh.O., Ashurov R.R. Matematik analiz. 1, 2, 3 q. -T.: "Mumtoz so'z", 2018 yil.
7. Xudayberganov G., Vorisov AK, Mansurov XT, Shoimqulov BA Matematik analizdan Ma'ruzalar, I, II q. -T.: "Voris-nashriyot", 2010 y