

**EMPIRIK TAQSIMOT FUNKSIYA****Nazirjonova Fayziniso Nozimjon qizi**

Andijon davlat pedagogika instituti Matematika va informatika 4-bosqich talabasi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19920365>

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada empirik taqsimot funksiyasi tushunchasi, uning ehtimollar nazariyasi va matematik statistika doirasidagi nazariy asoslari hamda amaliy qo'llanish imkoniyatlari tizimli tahlil qilinadi. Tadqiqotning maqsadi empirik taqsimot funksiyasining aniqlanishi, asosiy xossalari, yaqinlashuv natijalari va statistik xulosa chiqarishdagi rolini yagona metodologik doirada bayon etishdan iborat. Metodologiya sifatida o'lovli ehtimollik fazosi, tartibli statistika, Glivenko Kantelli tipidagi bir jinsli yaqinlashuv va Kolmogorov Smirnov funksional mezonlari bilan bog'liq nazariy yondashuvlar qo'llanadi. Ilmiy yangilik empirik taqsimot funksiyasini qurish, uning og'ishlari va ishonch yo'laklari talqini o'rtasidagi uzviy bog'lanishni mahalliy amaliy vazifalar uchun izchil konseptual model sifatida asoslash, shuningdek, cheklangan tanlamalarda silliqlash va og'ir dumli taqsimotlar sharoitida barqaror baholash masalalarini yagona tahliliy ramkada yoritishdan iborat.

**Kalit so'zlar.** empirik taqsimot funksiyasi; bir jinsli yaqinlashuv; Glivenko Kantelli teoremasi; Kolmogorov Smirnov mezoni; tartibli statistika; ishonch yo'lagi; noparametrik baholash.

Empirik taqsimot funksiyasi matematik statistikaning eng tayanch obyektlaridan biri bo'lib, u tanlama ma'lumotlarini taqsimot haqidagi nazariy tasavvurga bog'laydigan universal ko'priq vazifasini bajaradi. Parametrik modellarda ham, noparametrik yondashuvlarda ham taqsimotning noma'lum shaklini qayta tiklash, moslikni tekshirish, kvantillarni baholash, ehtimoliy xavflarni tavsiflash va ishonch oraliqlarini qurish kabi masalalar yakun-oqibat empirik taqsimot funksiyasi orqali ifodalanadi. Dolzarblik shundan iboratki, zamonaviy ma'lumotlar oqimida taqsimotlar ko'pincha murakkab, asimmetrik, og'ir dumli yoki aralash ko'rinishda bo'ladi; bunday vaziyatlarda qat'iy parametrik taxminlar noto'g'ri xulosalarga olib kelishi mumkin. Empirik taqsimot funksiyasi esa minimal farazlar ostida ishlaydi va nazariy jihatdan kuchli yaqinlashuv kafolatlariga ega bo'lgani sababli, amaliy tahlilda tayanch vosita sifatida qo'llanadi. Klassik natijalar, xususan bir jinsli yaqinlashuv g'oyasi va moslik mezonlari, nazariy ehtimollar bilan kuzatuvlar orasidagi masofani funksional ko'rinishda nazorat qilish imkonini beradi; bu esa ishonchlik va takrorlanuvchanlik talablariga mos ilmiy xulosa chiqarishga xizmat qiladi [4; 5].

Mavjud ilmiy yondashuvlar orasida ikki yo'nalish alohida ajralib turadi. Birinchi yo'nalish empirik taqsimot funksiyasini qat'iy noparametrik baho sifatida ko'rib, uning deyarli ishonchli yaqinlashuvi, funksional markaziy limit teoremlari va tebranish chegaralarini o'rganishga qaratilgan; bu yo'nalish nazariy ehtimollar maktabi bilan uzviy bog'langan [5; 6]. Ikkinchi yo'nalish esa empirik taqsimot funksiyasini amaliy diagnostika vositasi sifatida talqin qilib, moslikni tekshirish, taqsimotlararo solishtirish, ishonch yo'laklarini qurish va silliqlash usullari bilan boyitadi; bu yo'nalishda hisoblash statistikasining roli kuchayib boradi [2; 7]. Shunga qaramay, ayrim manbalarda empirik taqsimot funksiyasining nazariy xossalari va amaliy talqinlari parchalangan holda beriladi: yaqinlashuv teoremlari moslik mezonlaridan ajratilgan, ishonch yo'laklari esa og'ishlarning funksional tabiati bilan yetarlicha bog'lanmagan. Mazkur maqola ushbu bo'shliqni bartaraf etish, ya'ni ta'rif, xossalari, og'ish o'lovli va inferens mexanizmlarini yagona izchil matnda jamlashni maqsad qiladi.

Tadqiqotning maqsadi empirik taqsimot funksiyasining matematik ta'rif, asosiy analitik xossalari, tanlama hajmi ortishi bilan yaqinlashuv mexanizmlari hamda Kolmogorov Smirnov tipidagi funksional masofa orqali statistik xulosa chiqarishdagi imkoniyatlarini asoslashdan iborat. Vazifalar quyidagicha aniqlanadi: birinchidan, empirik taqsimot funksiyasini indikator funksiyalar yig'indisi sifatida formal kiritish va uning monotonligi, o'ngdan uzluksizligi, sakrashlar tuzilishini ko'rsatish; ikkinchidan, bir jinsli yaqinlashuv va uning natijasi sifatida kvantil baholashning barqarorligini tushuntirish; uchinchidan, empirik va nazariy taqsimotlar orasidagi supremum masofa asosida moslikni tekshirish g'oyasini bayon etish; to'rtinchidan, cheklangan tanlamalarda silliqlash hamda og'ir dumli holatlarda barqaror talqin masalalarini nazariy doirada izohlash. Ilmiy yangilik sifatida empirik taqsimot funksiyasining og'ishlari talqini va ishonch yo'laklari qurilishini bir-biriga bog'lovchi konseptual model ishlab chiqiladi hamda bu model noideal taqsimotlar sharoitida qo'llashga mos tarzda tahlil qilinadi. Amaliy ahamiyat esa ma'lumotlar tahlilida taqsimot shaklini oldindan qat'iy belgilamasdan turib, moslikni tekshirish va xavf ko'rsatkichlarini baholash imkoniyati bilan belgilanadi [1; 3].

**Materiali va metodi.** Tadqiqot nazariy xarakterga ega bo'lib, uning asosiy materiali sifatida mustaqil va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar tanlamasi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  hamda ularni hosil qiluvchi noma'lum taqsimot funksiyasi  $F$  qaraladi. Empirik taqsimot funksiyasi  $F_n(x)$  ushbu tanlamadagi kuzatuvlarning  $x$  dan kichik yoki teng bo'lish ulushini ifodalovchi baho sifatida aniqlanadi va indikator funksiyalar yig'indisi orqali ifodalanadi. Metodologik yondashuv o'lchovli ehtimollik fazosida aniqlangan taqsimot funksiyalari sinfi, ularning cheklangan variatsiyali xossalari hamda funksional yaqinlashuv tushunchalariga tayangan holda quriladi. Tanlangan yondashuvning ilmiy asoslanganligi shundaki, empirik taqsimot funksiyasi noparametrik baholashning minimal farazli modeli bo'lib, uning deyarli ishonchli bir jinsli yaqinlashuvi tanlama asosida taqsimotning butun grafigini tiklash imkonini beradi; bu esa nuqtaviy baholardan ko'ra kuchliroq informatsion mazmunga ega [5].

Usullar blokida bir nechta o'zaro bog'liq nazariy instrumentlar qo'llanadi. Birinchi instrument sifatida tartibli statistika va empirik funksiyaning sakrash nuqtalari orasidagi moslik ishlatiladi:  $F_n$  faqat tanlama qiymatlarida sakraydi va sakrash balandligi  $1/n$  ga teng bo'ladi, bu esa kvantil baholashni aniqlashda asosiy rol o'ynaydi. Ikkinchi instrument sifatida bir jinsli yaqinlashuv va og'ishlarni supremum normada o'lchash g'oyasi olinadi; aynan shu norma Kolmogorov Smirnov tipidagi mezonlar uchun tabiiy metrikani beradi [4]. Uchinchi instrument sifatida cheklangan tanlamada silliqlangan empirik taqsimot tushunchasi kiritiladi:  $F_n$  ning sakrashli tabiati ba'zi amaliy vazifalarda noqulay bo'lgani uchun, yadro silliqlash yoki monoton silliqlash orqali uzluksiz yaqinlashuvchi baholar qaraladi; bunda asosiy talab taqsimot funksiyasi sifatidagi monotonlik va chegaraviy qiymatlarning saqlanishidir [7]. Bu instrumentlar maqolada yagona mantiqiy zanjir sifatida qo'llanib, ta'rifdan boshlab inferensgacha bo'lgan yo'lni nazariy jihatdan izchil yoritishga xizmat qiladi.

**Natija.** Empirik taqsimot funksiyasi  $F_n(x)$  har bir  $x$  uchun 0 va 1 oralig'ida yotuvchi,  $x$  bo'yicha kamaymaydigan va o'ngdan uzluksiz qadamli funksiya bo'lib,  $x$  ning juda kichik qiymatlarida 0 ga, juda katta qiymatlarida 1 ga intiladi. Uning sakrash nuqtalari tanlama elementlarining tartiblangan qiymatlari bilan mos keladi; har bir sakrashning balandligi tanlama hajmiga teskari proporsional bo'lib, aniqlikning tanlama ortishi bilan kuchayishini formal aks ettiradi.  $F_n(x)$  ning kutilmasi  $F(x)$  ga tengligi har bir  $x$  da bevosita indikatorlarning matematik kutilmasidan kelib chiqadi, ya'ni  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  ning noyon (unbiased) bahosi sifatida talqin qilinadi.

Bir jinsli yaqinlashuv natijasi shundan iboratki, tanlama hajmi  $n$  ortishi bilan  $F_n(x)$  va  $F(x)$  orasidagi maksimal farq, ya'ni  $\sup_x |F_n(x) - F(x)|$  ehtimollik birga intilgan holda nolga yaqinlashadi. Bu fakt taqsimotning butun grafigi bo'ylab empirik bahoning barqarorlashishini bildiradi va nafaqat alohida nuqtalarda, balki barcha  $x$  lar bo'yicha bir vaqtning o'zida yaqinlashuvni kafolatlaydi. Ushbu xossa kvantil funksiyasiga ko'chirilganda, tanlama kvantillari mos nazariy kvantillarga yaqinlashishi uchun yetarli shart sifatida xizmat qiladi, chunki taqsimot funksiyasi va kvantil funksiyasi orasida monotonlikka asoslangan invers bog'lanish mavjud.

Empirik va nazariy taqsimotlar orasidagi farqni o'lchashning funksional ko'rinishi sifatida  $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$  kattaligi ajratiladi.  $D_n$  tanlama ma'lumotlarining nazariy modelga mosligini baholashda markaziy rol o'ynaydi: u nolga yaqin bo'lsa, empirik grafigi nazariy grafigiga yaqin, katta bo'lsa, mos kelmaslik ehtimoli ortadi. Shu bilan birga, amaliy vazifalarda  $F$  noma'lum bo'lgani sababli  $D_n$  ning taqsimoti asosida kritik qiymatlar tanlash va moslik qarorini chiqarish mexanizmi quriladi. Cheklangan tanlamalarda  $F_n$  ning sakrashli tabiati ko'rinishidagi diskretlik ba'zan talqinni murakkablashtiradi; shuning uchun silliqlangan  $F_{n,h}$  baholar kiritilganda, ular ham 0 va 1 orasida yotishi, monotonlikni saqlashi va  $h$  parametri mos tanlanganda  $F_{n,h}$  ning  $F_n$  ga, demakki  $F$  ga yaqinlashishi kuzatiladi.

Og'ir dumli taqsimotlar sharoitida empirik taqsimot funksiyasi markaziy sohalarda barqaror ishlaydi, dumlarda esa tanlama kamligi tufayli sakrashlar yirikroq ko'rinadi va kvantil baholashning dispersiyasi ortadi. Natija sifatida, dum kvantillarini baholashda  $F_n$  ga tayangan inferensda ehtiyotkorlik zarurligi, ishonch yo'laklari dumlarda kengayishi va silliqlashning foydasi ko'proq markaziy sohalarda namoyon bo'lishi faktlari qayd etiladi.

**Muhokama.** Olingan natijalar empirik taqsimot funksiyasining nazariy va amaliy o'rni haqidagi klassik qarashlarni izchil tasdiqlaydi:  $F_n$  bir tomondan juda sodda konstruktsiya bo'lsa-da, ikkinchi tomondan taqsimot haqidagi deyarli barcha asosiy savollarni noparametrik usulda yechishga imkon beradigan funksional obyekt hisoblanadi. Bir jinsli yaqinlashuv g'oyasi Glivenko Kantelli natijasi sifatida statistik barqarorlikning kuchli ko'rinishini beradi va bu ko'rinish moslikni tekshirish mezonlari uchun mustahkam poydevor bo'lib xizmat qiladi [5; 6]. Kolmogorov Smirnov tipidagi supremum masofa esa aynan empirik va nazariy grafiklar orasidagi eng yomon og'ishni o'lchagani uchun, model diagnostikasida intuitiv va matematik jihatdan asosli instrument sifatida qaraladi [4]. Shunday bo'lsa-da, amaliy vaziyatlarda  $F$  ko'pincha parametrik oiladan baholanadi yoki noma'lum parametrlar mavjud bo'ladi; bu esa  $D_n$  ning aniq taqsimotini o'zgartirishi va kritik qiymatlarni moslashtirish zaruratini tug'diradi. Demak, empirik taqsimot funksiyasining kuchi bilan birga, uning asosida qurilgan mezonlarning kalibrovkasi ham metodologik masala sifatida doimiy e'tibor talab qiladi.

Cheklangan tanlamalarda  $F_n$  ning qadamlı shakli vizual talqında ham, differensial xossalarga tayanadigan ba'zi algoritmlarda ham noqulaylik tug'diradi. Silliqlash usullari bu muammoni yumshatadi, biroq silliqlash parametrini tanlashda og'ish va dispersiya o'rtasidagi muvozanat paydo bo'ladi: haddan tashqari silliqlash taqsimotning lokal xususiyatlarini yo'qotishi, yetarli silliqlamaslik esa diskret tebranishlarni saqlab qolishi mumkin [7]. Og'ir dumli taqsimotlarda esa asosiy cheklov ma'lumotning dumlarda kam to'planishi bo'lib, bu holat  $F_n$  asosida dum risklarini baholashni sezgir qiladi; bu yerda empirik taqsimotni qo'llash bilan birga, dum uchun maxsus yarimparametrik yondashuvlar yoki blokli baholash g'oyalari bilan integratsiya qilish istiqbolli yo'nalish bo'lib ko'rinadi. Mazkur maqola doirasida bu integratsiya konseptual jihatdan ko'rsatildi, biroq aniq hisoblash tajribalari va solishtirma simulyatsiyalar keyingi tadqiqotlarga qoldiriladi.

Tadqiqotning cheklovlari shundan iboratki, tahlil asosan mustaqil va bir xil taqsimlangan kuzatuvlar doirasiga tayandi; vaqt qatorlari, fazoviy bog'liqlik yoki tanlanma og'irliklari mavjud bo'lgan holatlarda empirik taqsimot funksiyasining yaqinlashuv tezligi va og'ishlar tuzilishi o'zgaradi. Shuningdek, ko'p o'lchovli taqsimotlar uchun empirik taqsimot funksiyasini tartibli tuzilma orqali talqin qilish murakkablashadi va metrik tanlovi masalasi keskinlashadi. Shu bois kelajakdagi tadqiqotlar bog'liq kuzatuvlar, yuqori o'lchamlar va robust og'ish o'lchovlari uchun empirik taqsimotga asoslangan inferensni umumlashtirishga qaratilishi maqsadga muvofiq.

**Xulosa.** Empirik taqsimot funksiyasi tanlama ma'lumotlari asosida noma'lum taqsimotni noparametrik baholashning fundamental vositasi ekanligi asoslandi. Uning monotonligi, o'ngdan uzluksizligi va sakrashlar tuzilishi kvantil baholash hamda funksional diagnostika uchun tabiiy mexanizm yaratadi. Bir jinsli yaqinlashuv empirik bahoning butun argument sohasida barqarorlashishini ta'minlab, taqsimot grafigini tiklash va moslikni tekshirishning nazariy poydevorini beradi. Supremum og'ish asosidagi Kolmogorov Smirnov tipidagi yondashuv empirik va nazariy modellar orasidagi farqni funksional ko'rinishda o'lchashga imkon beradi. Cheklangan tanlamalarda silliqlash empirik funksiyaning diskret tabiatini yumshatishi mumkinligi, og'ir dumli taqsimotlarda esa dum sohalarida noaniqlik ortishi sababli talqinda ehtiyotkorlik zarurligi umumlashtirildi. Natijalar empirik taqsimot funksiyasini nazariy izchillik va amaliy qulaylikni birlashtiruvchi markaziy statistik obyekt sifatida qarash lozimligini ko'rsatadi.

#### **Adabiyotlar ro'yxati.**

1. Tursunov A. A., Xudoyberdiyev M. M. Matematik statistika asoslari. Toshkent, O'zbekiston, 2019. 320 b.
2. Shoyimqulov B. S. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Samarqand, Samarqand universiteti nashriyoti, 2020. 284 b.
3. G'aniev I. G'., Ismoilov J. S. Noparametrik statistik usullar. Toshkent, Fan va texnologiya, 2021. 256 b.
4. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Москва, Наука, 1974. 120 с.
5. Ван дер Ваарт А. Асимптотическая статистика. Москва, Физматлит, 2010. 470 с.
6. Billingsley P. Probability and Measure. Hoboken, John Wiley and Sons, 1995. 593 p.
7. Silverman B. W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London, Chapman and Hall, 1986. 175 p.