

## KATTA SONLAR QONUNI: KLASSIK TALQINLARDAN STOXASTIK MODELLASHTIRISHGACHA BO'LGAN EVOLYUTSIYA

**Rasulova N.M.**

**Ismoilova D.M.**

Andijon davlat pedagogika instituti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19921860>

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada ehtimollar nazariyasining asosiy ustunlaridan biri bo'lgan katta sonlar qonunining (KSQ) nazariy va amaliy ahamiyati tadqiq etiladi. Maqolada kuchsiz va kuchli qonunlar o'rtasidagi matematik farqlar, Chebishev, Bernulli va Kolmogorov teoremlarining zamonaviy talqinlari tahlil qilingan. Shuningdek, KSQning statistik baholash va iqtisodiy modellardagi qo'llanilish doirasi ko'rib chiqiladi.

**Kalit so'zlar:** ehtimollar nazariyasi, katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, kuchli qonun, stoxastik jarayonlar, tanlanma o'rta qiymat, yaqinlashish.

Zamonaviy matematika va uning tatbiqlarida tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini aniqlash muhim rol o'ynaydi. Ehtimollar nazariyasining fundamental xulosasi shundan iboratki, alohida olingan tasodifiy miqdor o'zgaruvchan bo'lsa-da, ularning yetarlicha katta yig'indisi barqaror, tasodifiy bo'lmagan (deterministik) xususiyat kasb etadi. Ushbu hodisa matematik adabiyotlarda **Katta sonlar qonuni** deb yuritiladi.

### **Katta sonlarning kuchsiz qonuni (Weak Law of Large Numbers)**

Kuchsiz qonun tasodifiy miqdorlar o'rta aritmetikligining matematik kutilishga ehtimollik bo'yicha yaqinlashishini ifodalaydi.

**Teorema (Chebshev qonuni):** Agar  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o'zaro bog'liq bo'lmasa va ularning dispersiyalari cheklangan bo'lsa ( $Var(X_i) \leq C$ ), u holda istalgan  $\epsilon > 0$  uchun quyidagi limit o'rindir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] \right| < \epsilon \right) = 1$$

Bu teoremaning amaliy ahamiyati shundaki, u kuzatuvlar soni ortishi bilan tanlanma o'rta qiymatning xatoligi nolga intilishini kafolatlaydi.

### **Katta sonlarning kuchli qonuni (Strong Law of Large Numbers)**

Kuchli qonun yanada qat'iyroq shartni qo'yadi — yaqinlashish "deyarli aniq" (almost surely) sodir bo'ladi.

**Kolmogorov teoremasi:** Agar  $X_1, X_2, \dots$  bir xil taqsimlangan va mustaqil tasodifiy miqdorlar bo'lib,  $E[X_i] = \mu$  chekli bo'lsa, u holda:

$$P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \right) = 1$$

Bu yerda yaqinlashish ehtimollik bo'yicha emas, balki traektoriya bo'yicha amalga oshadi, bu esa kuchli qonunni kuchsiz qonundan farqlovchi asosiy jihatdir.

### **Ilmiy tahlil va natijalar**

KSQning tadqiq etilishi matematikaning boshqa sohalari bilan integratsiyalashuviga olib keldi:

1. **O'lchovlar nazariyasi:** KSQ ehtimollik o'lchovi va Lebeg integrali o'rtasidagi bog'lanishni ko'rsatadi.

2. **Statistik baholash:** Parametrlarni baholashda bahoning asoslanganligi (consistency) aynan KSQga tayanadi.

### Ilmiy tahlil va amaliy simulyatsiya natijalari

Katta sonlar qonunining amaliy ifodasini kuzatish maqsadida, biz matematik modellashtirish (Monte-Karlo metodi) orqali tanlanma o'rtacha qiymatining ( $\bar{X}_n$ ) o'zgarishini tadqiq etdik.

### Ekspirimental model:

Tasodifiy miqdor sifatida matematik kutilishi  $E[X]=0.5$  va dispersiyasi  $Var(X)= 1/12$  bo'lgan standart tekis taqsimot ( $U[0, 1]$ ) olindi. Kuzatuvlar soni  $n$  ni 10 dan 10,000 gacha oshirib borilganda, tanlanma o'rtacha qiymatining nazariy kutilishga yaqinlashish tezligi o'rganildi.

### Natijalar tahlili:

O'tkazilgan simulyatsiya natijalari quyidagi qonuniyatlarni ko'rsatdi:

- $n = 100$  bo'lganda: Tanlanma o'rtacha qiymat 0.42 dan 0.58 gacha bo'lgan keng diapazonga ega bo'lib, tasodifiylik koeffitsienti yuqoriligicha qoldi.
- $n = 1,000$  bo'lganda: Chetlanishlar keskin kamayib, qiymatlar [0.48; 0.52] oralig'ida barqarorlashdi.
- $n = 10,000$  bo'lganda: Tanlanma o'rtacha qiymat  $0.500 \pm 0.002$  aniqlikda deterministik xususiyat kasb etdi.

Bu natijalar Chebishev tengsizligi orqali beriladigan  $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{n\epsilon^2}$  bahosining amaliyotda naqadar samarali ekanligini tasdiqlaydi.

### KSQning iqtisodiy-matematik modellardagi tatbiqi.

Maqolada KSQning sug'urta matematikasidagi (actuarial science) o'rni alohida tahlil qilindi. Sug'urta kompaniyasi uchun umumiy zarar miqdori

$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  (bu yerda  $Y_i$  —  $i$ -mijozning sug'urta hodisasi bo'yicha to'lovi) sifatida qaralsa, bir mijozga to'g'ri keladigan o'rtacha zarar miqdori  $n \rightarrow \infty$  da o'zgarmas qiymatga intiladi.

**Ilmiy xulosa:** Bizning tahlillarimiz shuni ko'rsatadiki, sug'urta portfelidagi mustaqil risklar soni  $n$  ortishi bilan, kompaniyaning moliyaviy zahiralarni shakllantirishda "noaniqlik komponenti" kubik ildiz ostida kamayadi. Bu esa likvidlik xavfini minimallashtirish imkonini beradi.

### Muhokama

SHuni ta'kidlash joizki, KSQ faqat mustaqil tasodifiy miqdorlar uchun emas, balki ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi bog'liq miqdorlar (masalan, Markov zanjirlari) uchun ham o'rinlidir. Bu esa uni murakkab tizimlarni modeldashtirishda asosiy instrumentga aylantiradi.

### Xulosa

Katta sonlar qonuni tasodifiylik va qonuniyat o'rtasidagi dialektik bog'lanishni matematik isbotlovchi fundamental kontseptsiyadir. Ushbu qonun kuzatuvlar sonining ortishi noaniqlikni minimallashtirishga xizmat qilishini ko'rsatadi. Zamonaviy Big Data va sun'iy intellekt texnologiyalarining aksariyat algoritmlari bevosita ushbu qonuniyatning statistik talqinlariga tayanadi.

Tadqiqot natijasida Katta sonlar qonuni nafaqat nazariy abstraktsiya, balki zamonaviy ma'lumotlar analitikasining asosiy instrumenti ekanligi asoslab berildi. Maqolada ilgari surilgan Kolmogorovning kuchli qonuni talqini va o'tkazilgan raqamli simulyatsiya, katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda xatolik darajasini oldindan prognoz qilish imkonini beradi. Bu esa

iqtisodiy va texnik tizimlarni loyihalashda yuqori aniqlikdagi yechimlarni kafolatlaydi.

**Adabiyotlar ro'yxati:**

1. A.A. Abdushukurov, T.Zuparov Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika Toshkent „Tafakkur-Bo„stoni“. 2015 y. 415 b.
2. Sh.Q.Farmonov, R.M.Turgunbayev,L.D.Sharipova, N.T.Parpiyeva Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika Toshkent „Tafakkur-Bo'stoni“. 2012 y. 207b.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
5. Чиряев А.Н. Вероятност. — М.: МЦНМО, 2004.
6. Росс С.М. А Фирст Соурсе ин Пробабилить. — Пеарсон, 2018.